

МАТЕМАТИКА

за средно стручно образование

4

СТРУКА/СЕКТОР: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија,
рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и
геодезија, Електротехничка/Електротехника,
Машинска/Машинство, Сообраќајна/Сообраќај, транспорт и
складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, Кожа и слични
производи и Хемиско-технолошка/Хемија и технологија



Лимонка Коцева Лазарова

Билјана Златановска

**МАТЕМАТИКА ЗА ЧЕТВРТА ГОДИНА
(изборен)**

СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ

Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Графичка/Графичарство, Економско-правна и трговска/Економија, право и трговија, Електротехничка/Електротехника, Здравствена/Здравство и социјална заштита, Земјоделска-ветеринарна/Земјоделство, рибарство и ветеринарство, Лични услуги/Лични услуги, Машинска/Машинство, Сообраќајна/ Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/ Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичка/ Угостителство и туризам, Хемиско-технолошка струка/Хемија и технологија и Шумарско-дрвопреработувачка/Шумарство и обработка на дрво

МАТЕМАТИКА ЗА ЧЕТВРТА ГОДИНА (изборен)

средно стручно образование

Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Графичка/Графичарство, Економско-правна и трговска/Економија, право и трговија, Електротехничка/Електротехника, Здравствена/Здравство и социјална заштита, Земјоделска-ветеринарна/Земјоделство, рибарство и ветеринарство, Лични услуги/Лични услуги, Машинска/Машинство, Сообраќајна/ Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичка/ Угостителство и туризам, Хемиско-технолошка струка/Хемија и технологија и Шумарско-дрвопреработувачка/Шумарство и обработка на дрво

Автори:

Лимонка Коцева Лазарова

Билјана Златановска

Рецензенти:

Марија Митева

Јагода Танушоска

Исмаил Амети

Лектор:

Слаѓан Спасовски

Стручна редакција:

Ристо Малчески

Уредник:

Елена Стефановска

Илустрации:

Лимонка Коцева Лазарова

Билјана Златановска

Издавач: Министерство за образование и наука на Република Северна Македонија,
ул. „Св. Кирил и Методиј“ бр. 54, 1000 Скопје

Графичко и техничко уредување: Ели Василевска Илиевска – APC СТУДИО

Место и година на издавање: Скопје, 2025 година

Со одлука за одобрување на учебникот по предметот Математика, изборен, четврта година, средно стручно образование, струка: Геолошко-рударска и металуршка, Градежно-геодетска, Графичка, Економско-правна и трговска, Електротехничка, Лични услуги, Машинска, Сообраќајна, Текстилно-кожарска, Угостителско-туристичка, Хемиско технолошка, број 26-316/1 од 14.03.2024 година, донесена од Националната комисија за учебници.

Предговор

Учебников е наменет пред сè за учениците од IV година во средните стручни училишта во Република Северна Македонија каде се застапени струките: Геолошко-рударска и металуршка/Геологија, рударство и металургија, Градежно-геодетска/Градежништво и геодезија, Графичка/Графичарство, Економско-правна и трговска/Економија, право и трговија, Електротехничка/Електротехника, Здравствена/Здравство и социјална заштита, Земјоделска-ветеринарна/Земјоделство, рибарство и ветеринарство, Лични услуги/Лични услуги, Машинска/Машинство, Сообраќајна/ Сообраќај, транспорт и складирање, Текстилно-кожарска/ Текстил, кожа и слични производи, Угостителско-туристичка/ Угостителство и туризам, Хемиско-технолошка струка/Хемија и технологија и Шумарско-дрвопреработувачка/Шумарство и обработка на дрво, како основен учебник по предметот математика (изборен). Но, тој може да се користи и како литература за секој кој сака да го изучува материјалот што се содржи во него.

Во учебникот се опфатени следните модуларни единици:

1. Диференцијално сметање (за економска струка/сектор);
2. Интегрално сметање (за економска струка/сектор);
3. Матрици (за сите останати струки/сектори);
4. Аналитичка геометрија во простор (за сите останати струки/сектори);
5. Неопределен интеграл (за сите останати струки/сектори);
6. Определен интеграл и примена (за сите останати струки/сектори).

Модуларните единици се разработени согласно наставната програма, која е предвидена да се реализира на часовите по математика за горе наведените струки од IV година во средните стручни училишта.

Секоја модуларна единица како една целина е поделена на наставни единици. Наставните единици обработуваат содржини, кои не се наменети за обработка на само еден наставен час. Наставникот по негово видување може да ги обработи на повеќе наставни часови.

Во секоја наставна единица како дел од модуларната единица се обработува конкретна наставна содржина во која јасно и недвосмислено се воведени нови поими, врската помеѓу нив, како и врската со претходно изучени поими. Тие се поткрепени со решени примери и задачи за решавање преку кои ученикот ќе ги усвои новите поими. На крајот од секоја наставна единица се дадени задачи за самостојна работа, кои ќе му помогнат на ученикот да го провери своето знаење за веќе изученото. На крајот од секоја модуларна единица се дадени задачи за повторување и утврдување на стекнатите знаења од модуларната единица. Успешното решавање на овие задачи од страна на ученикот ќе му овозможи за продлабочување на веќе стекнатите знаења.

На крајот од учебникот се дадени кратки одговори на задачите за самостојна работа од секоја наставна единица и задачите за повторување и утврдување на секоја модуларна единица, кои служат на ученикот за потврда на точно и успешно решената задача.

На крај искрено се надеваме дека овој учебник ќе му помогне на секој ученик за успешно совладување на потребниот материјал по предметот математика предвиден за изучување во IV година од горе наведените насоки во средните стручни училишта. Ние како автори ќе бидеме горди и задоволни, ако овој учебник дополнително ја одржи или разбуди љубовта на секој ученик кон математиката.

Од авторите

СОДРЖИНА

Модуларна единица 1 – Диференцијално сметање	7
1. Поим за извод на функција.....	8
2. Таблица на изводи од основни елементарни функции	14
3. Правила за диференцирање	18
3.1. Извод од производ на константа и функција	18
3.2. Извод од збир на функции	19
3.3. Извод од производ на функции	20
3.4. Извод од количник на функции	22
4. Извод на сложена функција.....	24
5. Извод од имплицитна функција и логаритамски извод.....	27
6. Поим за диференцијал	29
7. Извод од параметарски зададена функција	31
8. Равенка на тангента и равенка на нормала	32
9. Изводи од повисок ред	39
10. Монотоност и локални екстреми на функција	40
11. Конвексност/конкавност и превојни точки на функција	51
12. Испитување на тек и скицирање на график на функција.....	56
13. Примена на извод за решавање на проблеми од екстреми	69
14. Задачи за повторување на модуларната единица.....	79
Модуларна единица 2 – Интегрално сметање	81
1. Неопределен интеграл	82
2. Основни својства на неопределениот интеграл и таблица на основни интеграл 86	
3. Метод на замена	90
4. Метод на парцијална интеграција.....	95
5. Поим за определен интеграл.....	98
6. Основна теорема на интегралното сметање	104
7. Интеграција со смена кај определен интеграл	109
8. Парцијална интеграција на определен интеграл.....	114
9. Плоштина на рамнински лик	118
10. Волумен на ротационо тело	125
11. Задачи за повторување на модуларната единица	131
Модуларна единица 3 – Матрици.....	133
1. Поим за детерминанти од втор и трет ред.....	134

2. Својства на детерминанта од втор и трет ред.....	140
3. Решавање на систем од три линеарни равенки со три непознати и дискусија за множеството решенија	147
4. Поим за матрица.....	158
5. Операции со матрици	164
6. Инверзибилна и инверзна матрица.....	170
7. Решавање на матрични равенки.....	175
8. Решавање на систем од три линеарни равенки со три непознати	178
9. Гаусов метод на елиминација	180
10. Задачи за повторување на модуларната единица.....	183
Модуларна единица 4 – Аналитичка геометрија во простор.....	185
1. Скаларен производ на вектори.....	186
2. Векторски производ на вектори	192
3. Мешан производ на вектори.....	195
4. Општ облик на равенка на рамнина	197
5. Нормален облик на равенка на рамнина	201
6. Сегментен облик на равенка на рамнина	204
7. Равенка на рамнина низ три точки	208
8. Заемен однос на две рамнини	210
9. Растојание од точка до рамнина.....	214
10. Равенки на права во простор	216
11. Заемен однос на права и рамнина	223
12. Заемен однос на две прави	227
13. Растојание помеѓу две прави	235
14. Задачи за повторување на модуларната единица.....	239
Модуларна единица 5 – Неопределен интеграл.....	241
1. Неопределен интеграл	242
2. Основни својства на неопределениот интеграл и таблица на основни интегралы	246
3. Метод на замена	251
4. Метод на парцијална интеграција.....	256
5. Задачи за повторување на модуларната единица.....	261
Модуларна единица 6 – Определен интеграл.....	262
1. Поим за определен интеграл.....	263
2. Основна теорема на интегрално сметање	269

3. Интеграција со смена кај определен интеграл	273
4. Парцијална интеграција на определен интеграл.....	280
5. Плоштина на рамнински лик	285
6. Задачи за повторување на модуларната единица.....	291
Решенија:	293

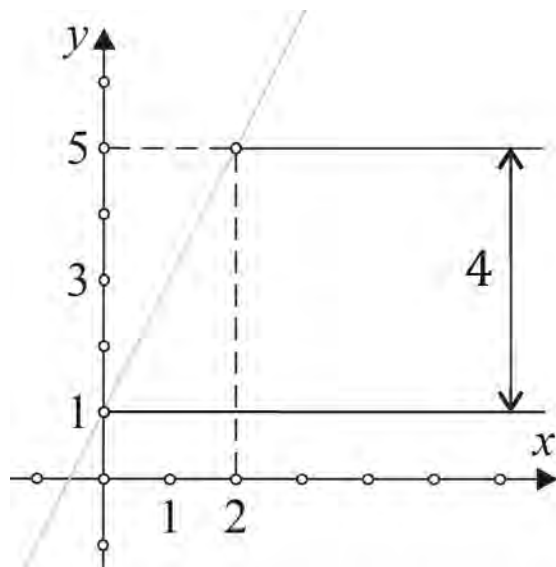
Модуларна единица 1 – Диференцијално сметање (за економска струка)

Многу физички феномени вклучуваат променливи величини - брзина на ракетата, монетарната инфлација, промена на добивката остварена при продажба на одреден производ, бројот на бактерии во културата, напонот на електричните сигнали и многу други. Во ова поглавје ќе го развиеме концептот „извод на функција“, кој е математичка алатка со помош на која се проучуваат стапките на промена на физичките величини.

1. Поим за извод на функција

Пример 1 ▶ Да ја разгледаме функцијата $y = 2x + 1$. Ако аргументот x на функцијата е 0, тогаш вредноста на функција е $y(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Се поставува прашањето, за колку ќе се промени вредноста на функцијата ако аргументот x се промени од 0 на 2 (Слика 1)?

$$y(2) - y(0) = (2 \cdot 2 + 1) - (2 \cdot 0 + 1) = 5 - 1 = 4.$$

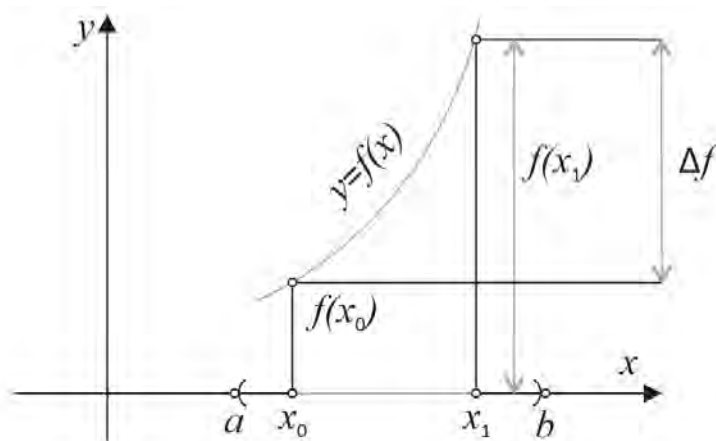


Слика 1

Нека функцијата $y = f(x)$ е дефинирана на интервалот (a, b) и нека x_0 и x_1 се вредности на аргументот x од интервалот (a, b) . Вредностите на функцијата f во точките x_0 и x_1 се $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1)$.

Промената на аргументот x , т.е. нараснувањето на аргументот во интервалот $[x_0, x_1]$ се дефинира со $\Delta x = x_1 - x_0$, додека промената на вредноста на функцијата $y = f(x)$, (нараснувањето на функцијата) се дефинира со:

$$\Delta y = \Delta f = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0).$$



Слика 2

Бидејќи, $\Delta x = x_1 - x_0$ следува дека $x_1 = x_0 + \Delta x$. Оттука промената на вредноста функција може да се запише на следниов начин: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Промената на вредноста на функцијата можеме да ја означуваме и со Δf .

Пример 2 Да ги определиме Δx и Δf на функцијата $f(x) = 2x^2 + 1$ ако $x_0 = 0$ и $x_1 = 2$.

За нараснувањето на аргументот и нараснувањето на вредноста на функцијата ќе добиеме:

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2 - 0 = 2,$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + 2) - f(0) = f(2) - f(0) = (2 \cdot 2^2 + 1) - (2 \cdot 0^2 + 1) = 9 - 1 = 8.$$

1

Опреди ги Δx и Δf на функцијата $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ако $x_0 = 1$ и $x_1 = 2$.

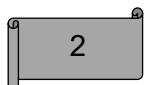
Пример 3

Да го определиме Δf за функцијата $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ за произволна

точка x .

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\
&= \frac{1}{2}(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 6 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 6 \\
&= x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x
\end{aligned}$$

Ако замениме $x = x_0 = 3$ и $\Delta x = 1$ добиваме $\Delta f = 3 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.



Опреди го Δf за функциите:

а) $f(x) = x^2 + 2$ во произволна точка x_0 ;

б) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ако $x_0 = 4$, $\Delta x = 2$.

Пример 4

За функцијата $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$ во пример 3 го определивме Δf за

произволна точката x_0 . За истата функција ќе го одредиме:

а) Количникот од промената на вредноста функцијата и промената на аргументот;

б) граничната вредност од количникот кога $\Delta x \rightarrow 0$.

Ќе ја одредиме граничната вредност ако $x = 3,5$.

$$\text{а) } \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{x\Delta x + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - 3\Delta x}{\Delta x} = x + \frac{1}{2}\Delta x - 3.$$

$$\text{б) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{2}\Delta x - 3 \right) = x - 3.$$

За $x = 3,5$ имаме $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = x - 3 = 3,5 - 3 = 0,5$.

Дефиниција 1: Ако постои конечна гранична вредност на количникот од промената на вредноста на функцијата $y = f(x)$ и промената на аргументот $x_0 \in D_f$, кога промената на аргументот се стреми кон 0 т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

тогаш велиме дека таа гранична вредност е **(прв) извод на функцијата $y = f(x)$ во точката x_0** и се означува со $f'(x_0)$. Операцијата за наоѓање на извод на функција се нарекува **диференцирање**, а за функцијата која во дадена точка x_0 има прв извод велиме дека е **диференцијабилна** во таа точка.

Ако функцијата е дадена во облик $y = f(x)$ тогаш изводот го означуваме со y' или $f'(x)$.

Пример 5

а) Да го определиме изводот на функцијата $y = 2x^2 + 5x$ во точките $x = -1$ и $x = 1$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (2(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x)) - (2x^2 + 5x) = \Delta x(4x + 5 + 2\Delta x)$$

Го одредуваме количникот:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(4x + 5 + 2\Delta x)}{\Delta x} = 4x + 5 + 2\Delta x.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 5 + 2\Delta x) = 4x + 5.$$

$$y'(-1) = 4 \cdot (-1) + 5 = 1$$

$$y'(1) = 4 \cdot 1 + 5 = 9.$$

б) Да го определиме изводот на функцијата $y = x^3$ во произволна точка $x \in \mathbb{R}$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2. \end{aligned}$$

3

Определи го изводот на функцијата а) $y = x^2 + 1$; б) $y = x^2 + x$.

Пример 6

а) Да го определиме изводот на функцијата $y = \frac{x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{x + \Delta x}{x + \Delta x + 1} - \frac{x}{x + 1} = \frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x((x + \Delta x + 1)(x + 1))} = \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

б) За функцијата $y = \sqrt{x+1}$, $x \geq -1$, имаме:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} - \sqrt{x + 1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} - \sqrt{x + 1}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}}{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 1 - (x + 1)}{\Delta x(\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(x + \Delta x) + 1} + \sqrt{x + 1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + 1}}. \end{aligned}$$

Изводот во точката $x = -1$ не постои, бидејќи за таа вредност добиваме неопределен израз.

4

Определи го изводот на функцијата $y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Дефиниција 2: Ако постојат конечните гранични вредности

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

тогаш тие се нарекуваат соодветно **лев** и **десен извод на функцијата** $y = f(x)$ **во точката** x_0 . Извод на $y = f(x)$ во точка x_0 постои ако и само ако постојат нејзиниот лев и десен извод во таа точка и тие се еднакви, $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$.

Пример 7

Функцијата $f(x) = \sqrt{x}$ е дефинирана на множеството $D_f = [0, \infty)$ и има извод во секоја точка $x \neq 0$ од дефиниционата област.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Ако $x = 0$, тогаш согласно Дефиниција 2 и дефиниционата област на функцијата може да постои само десниот извод на функцијата во точката $x = 0$. Да го пресметаме:

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = \infty.$$

Бидејќи граничната вредност е бесконечна, десниот извод во $x = 0$ не постои.

Теорема 1: Ако функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x_0 , тогаш функцијата $y = f(x)$ е непрекината во x_0 .

Доказ: Нека функцијата $y = f(x)$ има извод во точката x_0 . Тогаш

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ постои. За да покажеме дека функцијата } y = f(x) \text{ е}$$

непрекината во точката x_0 треба да покажеме дека $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \text{ и со користење на смената } x - x_0 = \Delta x,$$

$x = x_0 + \Delta x$ добиваме:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Од тоа што $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, следува дека $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Значи

функцијата е непрекината во точката x_0 . ■

Обратното тврдење на Теорема 1 во општ случај не важи. Како пример ќе ја посочиме функцијата $y = \sqrt{x}$ од пример 7. Оваа функција е непрекината на целиот свој домен $[0, \infty)$, но нема извод во точката $x_0 = 0$.

Задачи за самостојна работа

- Страните на правоаголникот се 10 m и 20 m. Одреди ја промената на периметарот и плоштината на правоаголникот ако:
 - поголемата страна се зголеми за 1 m;
 - помалата страна се зголеми за 0,5 m.
- Пресметај го Δy ако:
 - $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,1$;
 - $f(x) = 2x + 5$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 1$;
 - $f(x) = x^2 + 5$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 1$;
 - $f(x) = \sqrt{2x - 1}$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 8$.
- Пресметај го изводот на функцијата:
 - $y = 4x - 3$ во точката $x_0 = 1$;
 - $y = x^2 - 3$ во точката $x_0 = 2$;
 - $y = (x - 2)^2$ во точката $x_0 = 5$;
 - $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ во точката $x_0 = 1$.
- Опреди ги левиот и десниот извод на функцијата
 - $y = |x - 3|$ во точката $x_0 = 3$;
 - $y = |x + 2|$ во точката $x_0 = -2$;
 - $y = x^{\frac{3}{2}}$ во точката $x_0 = 0$;
 - $y = \sqrt{x - 5}$ во точката $x_0 = 5$.

2. Таблица на изводи од основни елементарни функции

Опредиувањето на извод по дефиниција често бара многу време и може да биде многу сложено. За таа цел, во оваа наставна единица, ќе наведеме листа на изводи на некои елементарни функции, позната како таблица на изводи или таблични изводи. Правилата за диференцирање кои ќе ги разгледаме во следната наставна единица и табличните изводи ни даваат алатка за наоѓање на извод на функции кои произлегуваат од елементарните функции добиени со операциите собирање, множење и делење.

Ќе го разгледаме следниот пример:

Пример 1

Да го најдеме по дефиниција изводот на функциите $f(x) = x^2$ и $f(x) = x^3$,

а потоа да заклучиме на што е еднаков изводот на функцијата $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x. \end{aligned}$$

Значи добивме дека $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

$$f(x) = x^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = 3x^2. \end{aligned}$$

Добивме дека $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

Сега, можеме да заклучиме дека и во општ случај за секој $n \in \mathbb{N}$ важи:

Ако $f(x) = x^n$ тогаш $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$.

Ако пак е дадена константната функција $f(x) = c$, c е константа, тогаш за првиот извод имаме:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0.$$

Значи, $f'(x) = c' = 0$.

Пример 2

Со помош на претходната формула ќе го определиме изводот на следните функции: а) $f(x) = x$; б) $f(x) = x^7$; в) $f(x) = x^{10}$.

За изводот на дадените функции имаме:

$$\begin{aligned} \text{а) } f'(x) &= x' = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1, \\ \text{б) } f'(x) &= (x^7)' = 7x^{7-1} = 7x^6, \\ \text{в) } f'(x) &= (x^{10})' = 10x^{10-1} = 10x^9. \end{aligned}$$

1

Опреди го изводот на функцијата:

$$\text{а) } f(x) = x^4; \quad \text{б) } f(x) = x^6; \quad \text{в) } f(x) = x^9.$$

За функцијата $f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$ формулата за пресметување на извод е:
 $(x^n)' = nx^{n-1}$ за секој $n \in \mathbb{R}$.

Пример 3

Да го определиме изводот на функциите:

а) $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$; б) $f(x) = x(\sqrt[3]{x})$; в) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$.

Согласно формулата за извод на функцијата $f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$, добиваме:

$$\text{а) } f'(x) = (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{б) } f(x) = x(\sqrt[3]{x}) = x \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{1+\frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}},$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x};$$

$$\text{в) } f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2};$$

$$\text{г) } f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

2

Опреди го изводот на следните функции:

а) $f(x) = \sqrt{x^3}, x \geq 0$; б) $f(x) = x^2\sqrt{x}, x \geq 0$;

в) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x \neq 0$.

Пример 4

Да го определиме по дефиниција изводот на функцијата

$$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\ &= a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Поради тоа што $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ добиваме дека $f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$. Ако $a = e$, тогаш $(e^x)' = e^x$.

Пример 5

Да го определиме по дефиниција изводот на функцијата $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\Delta x} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right). \end{aligned}$$

Бидејќи: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \log_a e$, следува дека $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$.

Значи имаме $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Во случај кога $a = e$ се добива $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Во продолжение е дадена таблицата на изводи од елементарни функции т.н. **таблични изводи**:

1. $(c)' = 0$, $c = \text{const}$	2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$	4. $(a^x)' = a^x \ln a$
5. $(e^x)' = e^x$	6. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}^+$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^+$	

Задачи за самостојна работа

1. Определи го изводот на следните функции со примена на соодветната формула:

а) $y = x^5$; б) $y = x^2 \sqrt[3]{x}$; в) $y = \sqrt[3]{x^5}$; г) $y = \frac{1}{x^5}$, $x \neq 0$.

2. Определи го изводот на следните функции со примена на соодветната формула:

а) $y = x^5 \sqrt{x}$, $x \geq 0$; б) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$, $x \neq 0$; в) $y = x\sqrt{x^5}$, $x \geq 0$;

г) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, $x \neq 0$; д) $y = 3^x$; е) $y = \log_2 x$, $x > 0$.

3. Правила за диференцирање

Наоѓањето извод врз основа на дефиницијата често може да биде многу комплицирано. Ние досега определевме изводи од некои елементарни функции. Наместо елементарни функции, почесто се среќаваме со функции кои се добиени со аритметички операции од елементарните функции. Со примена на одредени својства на изводот на функцијата, врз основа на изводот на елементарните функции, изводот на многу посложени функции може да се пресмета на релативно едноставен начин.

3.1. Извод од производ на константа и функција

Ќе ја дадеме следната теорема:

Теорема 1: Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна функција во точката x и c е константа. Тогаш и функцијата $c \cdot f$ е диференцијабилна во точката x и точно е:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x).$$

Доказ: Од дефиницијата на извод имаме:

$$(c \cdot f(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x). \quad \blacksquare$$

Пример 1

Да го определиме изводот на следните функции:

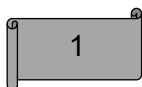
а) $f(x) = 2x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$, $x > 0$; в) $f(x) = 5 \cdot 2^x$.

Од соодветните таблични изводи и примена на теорема 1 добиваме:

а) $f'(x) = (2x^3)' = 2(x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2$;

$$\text{б)} f'(x) = \left(\frac{1}{2} \ln x \right)' = \frac{1}{2} (\ln x)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x};$$

$$\text{в)} f'(x) = (5 \cdot 2^x)' = 5(2^x)' = 5 \cdot 2^x \ln 2.$$



Определи го изводот на функцијата:

$$\text{а)} f(x) = 3x^4; \quad \text{б)} f(x) = 4 \ln x, \quad x > 0; \quad \text{в)} f(x) = \frac{1}{2} e^x.$$

3.2. Извод од збир на функции

Следната теорема се однесува на диференцирање на збир од две функции.

Теорема 2: Нека функциите $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции во точката x . Тогаш и функцијата $u + v$ е диференцијабилна во точката x и точно е:

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Доказ: Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции во точката x .

Од дефиницијата за извод имаме,

$$\begin{aligned} (u + v)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u + v)(x + \Delta x) - (u + v)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x). \end{aligned}$$

Забелешка: Бидејќи разликата на две функции се дефинира преку збир на две функции т.е. $(u - v)(x) = u(x) - v(x) = u(x) + (-1) \cdot v(x)$, правилото за диференцирање на разлика на две диференцијабилни функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ е:

$$(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x).$$

Пример 2

Да го определиме изводот на следните функции:

$$\text{а)} f(x) = 2x^3 + 5x^2; \quad \text{б)} f(x) = 3 \ln x + \sqrt{x}, \quad x > 0; \quad \text{в)} f(x) = 5e^x + \sqrt[3]{x}.$$

Од теорема 2 имаме:

$$\text{a) } f'(x) = (2x^3 + 5x^2)' = (2x^3)' + (5x^2)' = 6x^2 + 10x;$$

$$\text{б) } f'(x) = (3 \ln x + \sqrt{x})' = (3 \ln x)' + (\sqrt{x})' = \frac{3}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{6 + \sqrt{x}}{2x};$$

$$\text{в) } f'(x) = (5e^x + \sqrt[3]{x})' = (5e^x)' + (\sqrt[3]{x})' = 5e^x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Да напоменеме дека правилото за збир важи и за три и повеќе диференцијабилни функции во произволна точка x .

Пример 3

Да го определиме изводот на функцијата $f(x) = 2x^3 + 3x + \ln x$, $x > 0$.

$$f'(x) = (2x^3 + 3x + \ln x)' = (2x^3)' + (3x)' + (\ln x)' = 6x^2 + 3 + \frac{1}{x}.$$

2

Определи го изводот на следните функции:

$$\text{a) } f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 7x; \quad \text{б) } f(x) = \ln x + 2x - \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

3.3. Извод од производ на функции

Ќе ја докажеме следната теорема која се однесува на извод од производ на две функции:

Теорема 3: Нека функциите $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции во точката x . Тогаш и нивниот производ uv е диференцијабилна функција во x и точно е:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Доказ: Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции во точката x . За промената на функцијата uv во точката x имаме,

$$\begin{aligned} \Delta(u(x)v(x)) &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) \\ &\quad + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) = v(x + \Delta x)[u(x + \Delta x) - u(x)] \\ &\quad + u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)] = v(x + \Delta x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x). \end{aligned}$$

Од дефиницијата за извод имаме,

$$\begin{aligned}
 (u(x)v(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u(x)v(x))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x+\Delta x)\Delta u(x) + u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Пример 4

Да го определиме изводот на следните функции:

а) $f(x) = (2x+5)(x^2-3x+2)$; б) $f(x) = 5x^2 \cdot e^x$; в) $f(x) = (x+1) \cdot \ln x, x > 0$.

а) За функцијата $f(x) = (2x+5)(x^2-3x+2)$ нека $u(x) = 2x+5$ и $v(x) = x^2-3x+2$. Со користење на формулата за производ на функции добиваме

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
 f'(x) &= (2x+5)'(x^2-3x+2) + (2x+5)(x^2-3x+2)' \\
 f'(x) &= 2(x^2-3x+2) + (2x+5)(2x-3) \\
 f'(x) &= 2x^2-6x+4+4x^2-6x+10x-15 \\
 f'(x) &= 6x^2-2x-11.
 \end{aligned}$$

б) За функцијата $f(x) = 5x^2 \cdot e^x$, користејќи ја формулата за извод на производ на две функции, имаме:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (5x^2)'e^x + 5x^2(e^x)' \\
 f'(x) &= 10x \cdot e^x + 5x^2 \cdot e^x = 5xe^x \cdot (2+x).
 \end{aligned}$$

в) За функцијата $f(x) = (x+1) \cdot \ln x, x > 0$, користејќи ја формулата за извод на производ на две функции, имаме:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x+1)' \ln x + (x+1)(\ln x)' \\
 f'(x) &= \ln x + (x+1) \frac{1}{x} \\
 f'(x) &= \ln x + \frac{x+1}{x}.
 \end{aligned}$$

3

Опреди го изводот на следните функции:

а) $f(x) = (x^2+2)(x^3-1)$; б) $f(x) = 3x\sqrt{x}, x \geq 0$; в) $f(x) = (x^2+1)(x^2-1)$.

3.4. Извод од количник на функции

Ќе ја дадеме следната теорема:

Теорема 4: Нека функциите $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции во точката x , при што $v(x) \neq 0$. Тогаш и количникот $\frac{u}{v}$ е диференцијабилна функција во точката x и точно е:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Доказ: Нека $u = u(x)$ и $v = v(x)$ се диференцијабилни функции во точката x , при што $v(x) \neq 0$. За промената на функцијата $\frac{u}{v}$ во точката x имаме:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right) &= \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} \\ &= \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)} \\ &= \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)}. \end{aligned}$$

Од дефиницијата за извод имаме,

$$\begin{aligned} \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x + \Delta x)v(x)\Delta x} \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Пример 5

Да го определиме изводот на следните функции:

а) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$;

б) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, $x \neq 0$.

а) За функцијата $f(x) = \frac{x}{x+1}$, нека $u(x) = x$ и $v(x) = x+1$. Со користење на формулата за извод од количник на функции добиваме:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

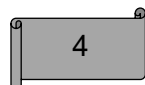
$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

б) За функцијата $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$, според формулата за извод од количник на функции добиваме:

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)'x^2 - (x^2-1)(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x^2 - x^2 \cdot 2x + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$



Опреди го изводот на следните функции:

а) $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, x \neq \pm 1;$

б) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}, x \neq -1.$

Задачи за самостојна работа

1. Опреди го изводот на следните функции:

а) $f(x) = 2x^2;$

б) $f(x) = -\frac{2}{4}\sqrt[4]{x}, x \geq 0;$

в) $f(x) = 3\sqrt[3]{x};$

г) $f(x) = 2x+3.$

2. Опреди го изводот на следните функции:

а) $f(x) = 2x^2 + 5x - 6;$

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}, x \neq 0;$

в) $f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3};$

г) $f(x) = 3x + \sqrt{x}, x \geq 0.$

3. Опреди го изводот на следните функции:

а) $f(x) = 4x^3\sqrt{x} - x\sqrt{x}\sqrt{x}, x \geq 0$

б) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, x \geq 0$

4. Определи го изводот на следните функции:

а) $f(x) = \ln x + e^x - 5x, x > 0$; б) $f(x) = 2^x + 5 \cdot 4^x$.

5. Определи го изводот на следните функции:

а) $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$ б) $f(x) = x^3 e^x$.

6. Определи го изводот на следните функции:

а) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, x \neq \pm 1$ б) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$;

в) $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}, x > 0$; г) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$.

4. Извод на сложена функција

Функцијата од облик $f(g(x))$ се вика **сложена функција** или композиција од функциите $f(x)$ и $g(x)$.

Така, функцијата од облик $y = \sqrt{x^2 - 1}$ е сложена функција. Со користење на смената $u(x) = x^2 - 1$, сложената функција ќе го добие обликот $y = \sqrt{u}$.

Ако имаме сложена функција од облик $y = (2x + 1)^4$, тогаш со воведување на смената $u(x) = 2x + 1$, сложената функција ќе го добие обликот $y = u^4$.

Пример 1

Следните функции, користејќи смена ќе ги запишеме во поедноставен облик:

а) Функцијата $y = (x - 3)^3$, со смената $u(x) = x - 3$ можеме да ја запишеме во обликот $y = u^3$.

б) Функцијата $y = \ln(x^2 - 3)$, со смената $u(x) = x^2 - 3$ можеме да ја запишеме во обликот $y = \ln u$.

в) Функцијата $y = e^{3x+5}$, со смената $u(x) = 3x + 5$, можеме да ја запишеме во обликот $y = e^u$.

1

За секоја од сложените функции:

а) $y = e^{\sqrt{x}}, x \geq 0$;

б) $y = \sqrt[3]{3x + 1}$,

определи $u(x)$ и запиши ја функцијата во облик $y = f(u)$.

Правилото за извод од сложена функција ќе биде дадено со следната теорема.

Теорема 1: Нека функцијата $u(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 , а функцијата f е диференцијабилна во точката $u_0 = u(x_0)$. Тогаш и нивната композиција како сложена функција $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ е диференцијабилна функција во точката x_0 при што важи:

$$(f(u(x_0)))' = f'(u(x_0))u'(x_0).$$

Доказ: Од дефиницијата на извод имаме:

$\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ следува $u(x_0 + \Delta x) = \Delta u + u_0$. Бидејќи u е непрекината имаме $\Delta u \rightarrow 0$ кога $\Delta x \rightarrow 0$. Тогаш

$$\begin{aligned} (f(u(x_0)))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0))}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0))}{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} = f'(u_0)u'(x_0). \end{aligned}$$

Значи, функцијата $(f \circ u)(x) = f(u(x))$ е диференцијабилна во точката x_0 и точно е $(f(u(x_0)))' = f'(u_0)u'(x_0)$. ■

Пример 1 ➡ Да го пресметаме изводот на следните функции:

а) $y = (3x - 4)^4$ б) $y = \sqrt{x-1}$ в) $y = \sqrt[3]{x^2-4}$ г) $y = e^{-2x}$ д) $y = e^{x^2-3x}$.

а) $y = (3x - 4)^4$

$$u(x) = 3x - 4, \quad y = u^4$$

$$y' = 4u^3 \cdot u'(x)$$

$$y' = 4(3x - 4)^3 \cdot (3x - 4)'$$

$$y' = 4(3x - 4)^3 \cdot 3 = 12(3x - 4)^3.$$

б) $y = \sqrt{x-1}$

$$u(x) = x - 1, \quad y = \sqrt{u}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot (x-1)'$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$$

в) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$

$$u(x) = x^2 - 4, \quad y = \sqrt[3]{u}$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}} \cdot u'(x)$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \cdot (x^2 - 4)'$$

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}.$$

г) $y = e^{-2x}$

$$u(x) = -2x, \quad y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u'(x)$$

$$y' = e^{-2x} \cdot (-2x)'$$

$$y' = e^{-2x} \cdot (-2) = -2e^{-2x}.$$

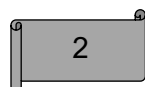
д) $y = e^{x^2 - 3x}$

$$u(x) = x^2 - 3x, \quad y = e^u$$

$$y' = e^u \cdot u'(x)$$

$$y' = e^{x^2 - 3x} \cdot (x^2 - 3x)'$$

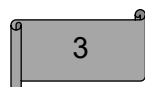
$$y' = e^{x^2 - 3x} \cdot (2x - 3) = 2xe^{x^2 - 3x} - 3e^{x^2 - 3x}.$$



Определи го изводот на следните функции:

а) $y = (4x - 3)^6$;

б) $y = e^{-x^3}$.



Определи го изводот на следните функции:

а) $y = (2x^2 + 3x + 1)e^x$;

б) $y = (x + 1)\sqrt{x^2 + 1}$;

в) $y = 3xe^{x^2 + 1}$.

Задачи за самостојна работа:

1. Определи го изводот на следните функции:

а) $y = (2x^2 + 5x - 6)^5$;

б) $y = (x^5 + 2x)^8$;

в) $y = (5x^5 + 3x^3 + 1)^5$;

г) $y = (mx + n)^6$.

2. Определи го изводот на следните функции:

а) $y = (x + 3)(2x - 5)^2$;

б) $y = (x + 2)^2(x^2 - 3x + 1)^3$.

3. Определи го изводот на следните функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

б) $y = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$.

4. Определи го изводот на следните функции:

а) $y = e^{2x+5}$;

б) $y = x^2 e^{\sqrt{x}}$.

5. Извод од имплицитна функција и логаритамски извод

Во оваа наставна единица прво ќе го разгледаме пресметувањето на извод кога функцијата е зададена во имплицитен облик. Постапката за наоѓање на извод од имплицитно зададена функција можеме да ја искористиме за пресметување на т.н. логаритамски извод.

Имплицитна функција е функција во која променливата y не е изразена преку променливата x .

Нека е зададена функцијата во имплицитен облик $F(x, y) = 0$, при што $y = y(x)$ е дефинирана на интервал $x \in (a, b)$, каде x е независна променлива. Понекогаш е многу тешко кога функцијата е зададена во имплицитен облик y да го изразиме преку x . Многу поедноставно би било доколку изводот на функцијата би се одредил со имплицитен метод.

Нека функцијата $y = y(x)$ е диференцијабилна на интервалот $x \in (a, b)$. Имплицитниот облик може да го запишеме како $F(x, y(x)) = 0$ за секое $x \in (a, b)$. Тогаш со користење на извод на сложена функција добиваме

$$F'_x(x, y(x)) + F'_y(x, y(x)) \cdot y' = 0,$$

каде $F'_x(x, y(x))$ е извод на функцијата по x , а $F'_y(x, y(x))$ е извод на функцијата по y која пак зависи од x . Доколку го изразиме изводот y' добиваме дека изводот на имплицитно зададената функција може да се најде според следната формула,

$$y' = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}.$$

Непосредното пресметување на извод е со пресметување на извод на секој член на зададената функција, при што мора да се води сметка дека x е независна променлива, а y е функција која зависи од променливата x .

Опишаната постапка за пресметување извод на имплицитна функција најдобро може да се разгледа преку примери.

Пример 1

Да го определиме изводот на функцијата дадена во имплицитен облик:

$$x^2 + 4x + y^2 = 5.$$

Со непосредно пресметување на извод се добива:

$$2x + 4 + 2yy' = 0.$$

При пресметување на извод од имплицитно зададена функција $F(x, y) = 0$ потребно е да се внимава на постоење на функцијата $y = y(x)$. Со други зборови, y е зависна променлива која зависи од независната променлива x , па пресметувањето извод на y е всушност пресметување на извод од сложена функција.

Сега останува уште само да го изразиме y' . Значи добиваме:

$$2yy' = -2x - 4,$$

$$y' = \frac{-x-2}{y},$$

$$y' = -\frac{x+2}{y}.$$

Пример 2

Да го определиме изводот на функцијата дадена во имплицитен облик:

$$x^2 + xy + y^2 = 2.$$

Да забележиме дека овде за да го најдеме изводот на xy ќе го користиме правилото за извод на производ на две функции. Значи ќе добиеме:

$$2x + (y + xy') + 2yy' = 0,$$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0,$$

$$y'(x + 2y) = -2x - y$$

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

1

Опреди го изводот на функцијата зададена во имплицитен облик:

а) $x^2 + 4x + y^2 = 5$

б) $x^3 + 2x + 2y^2 = 5,$

в) $xy^2 + 2xy + y = 1,$

г) $x^3 + y^3 + 2 = 0.$

Како што напоменавме на почеток на наставната единица, изводот од имплицитно зададена функција можеме да го искористиме за пресметување на т.н. логаритамски извод. Логаритамски извод се применува кога независната променлива е и во основата и во експонентот на некој степен.

Пример 3

Да го пресметаме изводот на функцијата $y = x^x$, $x > 0$. За да го најдеме изводот од оваа функција мораме да се ослободиме од x што се наоѓа во експонентот. За таа цел ја логаритмираме функцијата:

$$\ln y = \ln x^x, \text{ т.е. } \ln y = x \ln x.$$

Потоа, диференцираме:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} & \text{т.е.} & y' = y(1 + \ln x) \\ \frac{y'}{y} &= 1 + \ln x & & y' = x^x (1 + \ln x) \end{aligned}$$

3

Опреди го изводот на следните функции:

а) $y = x^{1-x^2}$;

б) $y = x^{x^3}$.

Задачи за самостојна работа

1. Опреди го изводот на следните имплицитно зададени функции:

а) $x^2 y + 2x + y^2 = 1$;

б) $x^2 + 4xy + y^2 = 0$;

в) $xy^2 + 2x + y = 4$;

г) $x^3 + xy^3 - 5 = 0$.

2. Опреди го логаритамскиот извод на следните функции:

а) $y = x^{\sqrt{x}}$;

б) $y = x^{2x}$;

в) $y = \left(\frac{1+x^2}{x} \right)^x$;

г) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

6. Поим за диференцијал

Важен поим поврзан со егзистенцијата на изводот на функција е поимот **диференцијал на функција**. Тој може да биде искористен и за приближни пресметувања.

Дефиниција 1: Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна во точката x_0 т.е. постои извод $y'(x_0) = f'(x_0)$. Производот $y'(x_0) \cdot \Delta x$ се нарекува **диференцијал на функцијата** $y = f(x)$ во точката x_0 и се означува со $dy(x_0)$ или кратко со dy .

Значи, диференцијалот на функцијата $y = f(x)$ во точката x_0 е $dy(x_0) = y'(x_0) \Delta x$, а во произволна точка x е $dy = y' \Delta x$.

Пример 1

а) Диференцијалот на функцијата $f(x) = x^4$ за произволна точка x од доменот $D = \mathbb{R}$ е $dy = 4x^3 \Delta x$, бидејќи $f'(x) = 4x^3$.

б) Користејќи го фактот дека изводот на линеарната функција $y = x$ е $y' = 1$, за диференцијалот на линеарната функција имаме дека $dy = dx = y' \Delta x = \Delta x$, од каде $dx = \Delta x$. Според тоа, диференцијалот на функција $y = f(x)$ можеме да го запишеме во обликот $dy = y' dx$. Оттука пак излегува дека $y' = \frac{dy}{dx}$, па $\frac{dy}{dx}$ (се чита „де ипсилон по де икс“) е уште една ознака за извод воведена од Лајбниц, за разлика од претходната која потекнува од Лагранж.

1

Определи го диференцијалот на следните функции:

а) $y = xe^x$; б) $y = \ln(x^2 + 1)$.

Ако $y = f(x)$ е диференцијабилна во x_0 , тогаш нараснувањето $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и диференцијалот dy во точката x_0 се еквивалентни бескрајно мали величини кога $\Delta x \rightarrow 0$. Поради ова својство се вели дека dy е главна вредност на Δy , бидејќи за доволно мало $|\Delta x|$ можеме да сметаме дека $\Delta y \approx dy$.

Ова својство може да се искористи за приближно пресметување на вредности на функции, користејќи ја формулата $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx dy$ т.е. $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$ за мали вредности на $|\Delta x|$.

Пример 2

За функцијата $y = x^2$ со домен $D = \mathbb{R}$ нејзиниот диференцијал во произволна точка x од нејзиниот домен е $dy = 2x dx$, бидејќи $y' = 2x$. Диференцијалот на функцијата во точка $x_0 = 1$ е $dy = 2dx$. Со користење на диференцијал на функција можеме приближно да пресметаме колку е $1,2^2$ на следниот начин:

Прво ќе ја искористиме формулата $dy = 2x \Delta x$, каде $x_0 = 1$ и $\Delta x = 1,2 - 1 = 0,2$. Добиваме $dy = 2x \Delta x = 0,4$. Потоа, ќе ја искористиме формулата $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy$ за $x_0 = 1$ и $\Delta x = 1,2 - 1 = 0,2$. Добиваме $f(x_0 + \Delta x) = f(1,2) \approx f(x_0) + dy = 1 + 0,4 = 1,4$. Значи, $1,2^2 \approx 1,4$.

2

Пресметај приближно:

а) $\sqrt{4,0002}$; б) $\ln 2,003$.

Задачи за самостојна работа

1. Определи го диференцијалот на следните функции:

а) $y = xe^{-x}$; б) $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; в) $y = x^2 \ln x$; г) $y = \frac{x^3 + 2x}{x+1}$.

2. Пресметај приближно:

а) $\sqrt[3]{1,0003}$; б) $\ln 1,001$; в) $\sqrt{9,0003}$.

7. Извод од параметарски зададена функција

Нека $y = y(x)$ е непрекината функција каде $x = x(t)$, $y = y(t)$ се непрекинати функции на интервалот $t \in (a, b)$. Во овој случај велиме дека функцијата $y = y(x)$ е определена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (a, b)$.

Теорема 1: Ако $x = x(t)$, $y = y(t)$ се диференцијабилни функции на интервалот $t \in (a, b)$ и $y'(t) \neq 0$ тогаш и функцијата $y = y(x)$ е диференцијабилна и притоа важи:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}.$$

Доказ: Нека параметарот t има промена Δt . Тогаш функциите x и y добиваат промени Δx и Δy т.е. $x + \Delta x = x(t + \Delta t)$, $y + \Delta y = y(t + \Delta t)$, $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$. За изводот на функцијата $y = y(x)$ имаме:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{x(t + \Delta t) - x(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} = \\ &= \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \end{aligned}$$

Пример 1

За функцијата $y = y(x)$, зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ го пресметуваме $y'(x)$:

а) $x(t) = t^3 + 3t + 1$, $y(t) = t^3 - 3t + 1$; б) $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$.

а) Според формулата дадена во теорема 1, првиот извод $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.

б) $y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$

1

За функцијата $y = y(x)$, зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ пресметај $y'(x)$.

а) $x = 3t^2 + 2t - 3$, $y = 2t^2 + 2t - 1$; б) $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt[3]{t}$.

в) $x = 2 \ln t$, $y = \frac{1}{t} + 8$; г) $x = 2e^{t^2+3t}$, $y = 2t^2 + 6t$.

Задачи за самостојна работа

1. За функцијата $y = y(x)$, зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ пресметај $y'(x)$.

а) $x = \ln t + 4$, $y = t^2 + 2$; б) $x = \ln(t + 5)$, $y = \ln(-t)$.

2. За функцијата $y = y(x)$, зададена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$ пресметај $y'(x)$.

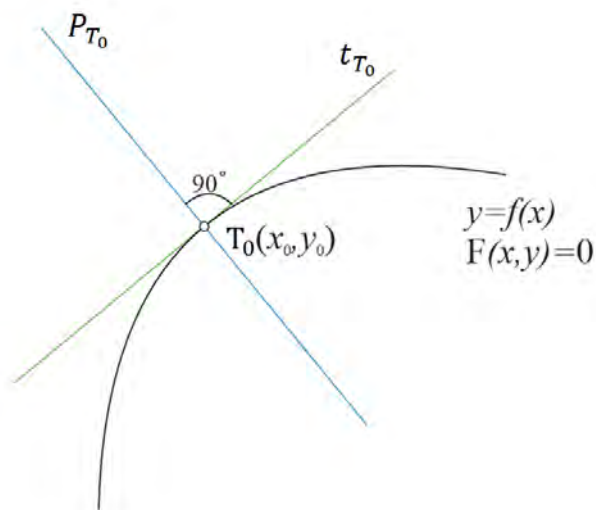
а) $x = 5(e^t + e^{-t})$, $y = 3(e^t - e^{-t})$; б) $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$.

8. Равенка на тангента и равенка на нормала

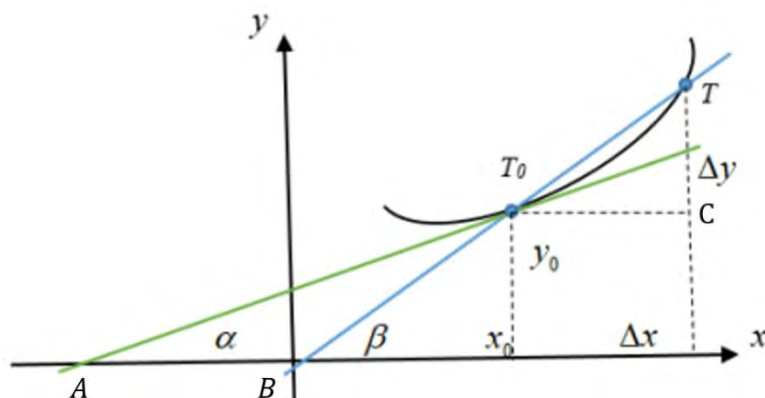
Овде ќе ја разгледаме примената на првиот извод во одредувањето на равенките на тангента и нормала на график на функција.

Нека е дадена функцијата $y = f(x)$. Нека точката $T_0(x_0, y_0)$ припаѓа на графикот на функцијата. Тангентата на графикот на функцијата во точката $T_0(x_0, y_0)$ е права која го допира графикот на функцијата во точката T_0 . Тангентата ќе ја означуваме со t_{T_0} каде во индексот се нагласува точката во која ја бараме тангентата.

Нормала на график на функција во дадена точка е права која е нормална на тангентата која минува низ таа точка. Нормалата обично се означува со p_{T_0} , каде повторно во индексот нагласуваме во која точка ја бараме нормалата, слика 4.



Слика 4 а)



Слика 4 б)

Коефициентот на правецот на тангентата повлечена во точката $T_0(x_0, y_0)$ е $k_{t_{T_0}} = \operatorname{tg} \alpha$ (слика 4б). Од дефиницијата на тригонометриската функција $\operatorname{tg} x$ и од триаголникот на слика 4 б) ΔT_0CT , следува дека: $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, каде β е аголот што секантата (правата

BT која минува низ точката T_0) го зафаќа со позитивниот дел на x -оската.

Добиваме дека: $y - y_0 = \operatorname{tg} \beta \cdot (x - x_0)$.

Како се намалува Δx , т.е. кога $\Delta x \rightarrow 0$, отклонот на секантата се повеќе се доближува до отклонот на тангентата и за $\Delta x = 0$, секантата се поклопува со тангенатата.

Важи дека $k_{t_{T_0}} = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Равенката на тангената го има следниов облик:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Од условот за нормалност на прави имаме дека $k_p = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$, па равенката на нормала е:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример 1 Да ја напишеме равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата $y = 2x^2 - x + 1$ во точката $A(1, 2)$.

Равенка на тангента

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$f'(x) = 4x - 1, \quad f'(1) = 4 \cdot 1 - 1 = 3,$$

па оттука, равенката на тангента ќе биде:

$$y - 2 = 3(x - 1),$$

$$3x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1.$$

Равенка на нормала

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1),$$

$$x + 3y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

Пример 2 Да ја напишеме равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата $y = 2x^3 - 3x + 2$ во точката $A(1, y_0)$.

Ординатата на точката $A(1, y_0)$ е:

$$y_0 = f(x_0) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1.$$

Равенката на тангента е дадена со формулата:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

каде коефициентот на правец на тангентата е вредноста на првиот извод во точката $x_0 = 1$, т.е.

$$f'(x) = 6x^2 - 3, \quad f'(1) = 6 \cdot 1^2 - 3 = 3,$$

од каде за равенката на тангента во дадената точка $A(1, 1)$ е:

$$y - 1 = 3(x - 1),$$

$$3x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

Равенката на нормала

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1),$$

$$x + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Пример 3

Да ја напишеме равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата $y = \sqrt{x}$ во точката $A\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$.

Да ја определиме апсцисата на точката $A\left(x_0, \frac{1}{2}\right)$:

$$f(x_0) = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{x_0} = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{1}{4}.$$

Равенката на тангента е:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

каде коефициентот на правец на тангентата е вредноста на првиот извод во точката $x_0 = \frac{1}{4}$, т.е.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1,$$

од каде за равенката на тангента во дадената точка $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ добиваме:

$$y - \frac{1}{2} = 1\left(x - \frac{1}{4}\right), \quad \text{т.е.} \quad y = x + \frac{1}{4}.$$

Равенката на нормала во точката $A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ е:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$y = -x + \frac{3}{4}.$$

1

Напиши ја равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата

а) $y = -x^2 - 2x$, во точката $A(-2, y_0)$;

б) $y = \frac{1}{x^2}$, во точката $A(-1, y_0)$.

Пример 4 Да ја напишеме равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x - 8}$, во точката $A(5, y_0)$.

Постапката за решавање е иста како и во претходните примери:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(5) = \sqrt[3]{5^2 - 5 \cdot 5 - 8} = \sqrt[3]{-8} = -2, \\ f'(x) &= \left[(x^2 - 5x - 8)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^2 - 5x - 8)^{\frac{1}{3}-1} (x^2 - 5x - 8)', \\ &= \frac{1}{3} (x^2 - 5x - 8)^{-\frac{2}{3}} (2x - 5) = \frac{2x - 5}{3\sqrt[3]{(x^2 - 5x - 8)^2}}, \\ f'(x_0) &= f'(5) = \frac{2 \cdot 5 - 5}{3\sqrt[3]{(5^2 - 5 \cdot 5 - 8)^2}} = \frac{5}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Равенка на тангента:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0), \\ y + 2 &= \frac{5}{12}(x - 5), \\ 5x - 12y - 49 &= 0. \end{aligned}$$

Равенка на нормала:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \\ y + 2 &= -\frac{12}{5}(x - 5) \\ 12x + 5y - 50 &= 0. \end{aligned}$$

Пример 5

Да ја напишеме равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата $y = x^2 - 2x$ во точките во кои графикот ја сече x -оската.

Графикот на оваа функција е парабола. Да ги најдеме прво пресечните точки со x -оската.

$$y = 0, x^2 - 2x = 0, x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Значи бараме равенка на тангента и равенка на нормала во точките $A(0, 0)$ и $B(2, 0)$.

Ќе го одредиме првиот извод на функцијата:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Равенката на тангента во точката $A(0, 0)$ е:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

Равенка на нормала во точката $A(0, 0)$ е:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

$$\begin{aligned}f'(0) &= 2 \cdot 0 - 2 = -2 \\y &= -2x, \\2x + y &= 0.\end{aligned}$$

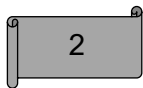
$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{2}x, \\x - 2y &= 0.\end{aligned}$$

Равенката на тангента во точката $B(2,0)$ е:

$$\begin{aligned}f'(2) &= 2 \cdot 2 - 2 = 2, \\y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0), \\y &= 2(x - 2), \\2x - y - 4 &= 0.\end{aligned}$$

Равенката на нормала во точката $B(2,0)$ е:

$$\begin{aligned}y - y_0 &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \\y - 0 &= -\frac{1}{2}(x - 2), \\y &= -\frac{1}{2}x + 1.\end{aligned}$$



Напиши ја равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата

а) $y = \sqrt{x^2 - 3}$ во точката $A(2, y_0)$;

б) $y = x^4 - 3x^2 + x - 1$, во точката $A(2, y_0)$.

Пример 6

Да ја напишеме равенката на тангента на кривата $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$ која е паралелна со правата $7x - 4y + 28 = 0$. Во точките на допир да се напише и равенка на нормала.

Бидејќи тангентата е паралелна на правата $7x - 4y + 28 = 0$, тие имаат ист коефициент на правец.

$$\begin{aligned}7x - 4y + 28 &= 0 \\4y &= 7x + 28 \\y &= \frac{7}{4}x + 7 \\k &= \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k = f'(x) &= 3x^2 - 4x + 1, \\3x^2 - 4x + 1 &= \frac{7}{4}, \\12x^2 - 16x - 3 &= 0.\end{aligned}$$

Решение на оваа квадратна равенка се: $x_1 = \frac{3}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{6}$.

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{13}{8}, \quad f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{481}{216}$$

Значи бараме равенка на тангента и равенка на нормала во точките $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right)$ и $B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right)$.

Равенката на тангента во точката $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right)$ и $k = \frac{7}{4}$ ќе биде:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0), \\ y + \frac{13}{8} &= \frac{7}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ 14x - 8y - 34 &= 0, \\ 7x - 4y - 17 &= 0. \end{aligned}$$

Равенката на нормала во точката $A\left(\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right)$ и $k = \frac{7}{4}$ ќе биде:

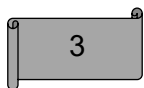
$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{1}{k}(x - x_0), \\ y + \frac{13}{8} &= -\frac{4}{7}\left(x - \frac{3}{2}\right), \\ 32x + 56y + 43 &= 0. \end{aligned}$$

Равенката на тангента во точката $B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right)$ и $k = \frac{7}{4}$ ќе биде:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0), \\ y + \frac{481}{216} &= \frac{7}{4}\left(x + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$

Равенката на нормала во точката $B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{481}{216}\right)$ и $k = \frac{7}{4}$ ќе биде:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= -\frac{1}{k}(x - x_0), \\ y + \frac{481}{216} &= -\frac{4}{7}\left(x + \frac{1}{6}\right). \end{aligned}$$



Напиши ја равенката на тангента на кривата $y = x^3 + 3x^2 - 5$ која е паралелна на правата $6x + 2y + 3 = 0$. Во точките на допир напиши и равенка на нормала.

Задачи за самостојна работа

- Напиши ја равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата:
 - $y = x^4 - x^2 + 3$ во точката $A(1, y_0)$;
 - $y = x^3 - 3x^2 + 5$, во точката $A(-2, y_0)$.
- Напиши ја равенката на тангента и равенката на нормала на графикот на функцијата $y = 4 - x^2$ во точките на пресек со x -оската.
- Напиши ја равенката на тангента на кривата $y = x^2 - 1$ која е паралелна на правата $6x - y - 10 = 0$. Во точките на допир напиши и равенка на нормала.
- Напиши ја равенката на тангента на кривата $y = 2x^3 + 4x^2 - x$ која е нормална на правата $2x + y + 4 = 0$. Во точките на допир напиши и равенка на нормала.

9. Изводи од повисок ред

За да дефинираме извод на функција од повисок ред, прво ќе дефинираме втор извод на функција $y = f(x)$. Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна на множеството D_f , тогаш нејзиниот извод $f'(x)$ е функција дефинирана на D_f .

Дефиниција 1: Ако постои прв извод на изводната функција $f'(x)$ на D_f тогаш $(f'(x))'$ се нарекува **втор извод на функцијата** $y = f(x)$ и се означува со $f''(x)$.

Означуваме, $f''(x) = (f'(x))'$ или $y''(x) = (y'(x))'$.

Со понатамошно диференцирање на вториот извод $f''(x)$ го добиваме третиот извод на функцијата $(f''(x))' = f'''(x)$. Со истата постапка понатаму може да се добијат четврти, петти извод итн., се додека е исполнет условот за постоење на следниот извод.

Пример 1

За функцијата $y = x^5$ имаме:

$y' = 5x^4$, $y'' = 20x^3$, $y''' = 60x^2$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(5)} = 120$, $y^{(6)} = 0$ и секој нареден извод ќе биде 0.

Пример 2

Да го определиме третиот изводот на функцијата $y = x \ln x$.

$$y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x,$$

$$y'' = (1 + \ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Пример 3

Да го определиме вториот изводот на функцијата $y = x^3 \ln \frac{x}{2}$.

$$y' = 3x^2 \ln \frac{x}{2} + x^3 \frac{2}{x} \frac{1}{2} = 3x^2 \ln \frac{x}{2} + x^2,$$

$$y'' = 6x \ln \frac{x}{2} + 3x^2 \frac{2}{x} \frac{1}{2} + 2x = 6x \ln \frac{x}{2} + 5x.$$

1

Опреди го вториот извод на функцијата:

а) $y = xe^x$;

б) $y = x^2 \ln x$;

$$в) y = \sqrt{x^2 - 1};$$

$$г) y = \frac{x+1}{x-1}.$$

2 Докажи дека функцијата $y = \frac{x-2}{x+3}$ ја задоволува равенката $(x-2)y'' + 2yy' = 0$.

Задачи за самостојна работа

1. Определи го вториот изводот на функцијата:

$$а) y = e^{2x-3};$$

$$б) y = \ln(x^2 + 2x);$$

$$в) y = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$г) y = x^3 \ln x.$$

$$д) y = \sqrt{x\sqrt{x}};$$

$$е) y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2};$$

$$е) y = 2x^2 + 5x - 3.$$

2. Определи го вториот извод на функцијата:

$$а) x^3 - 3x^2 + 1 - y = 0$$

$$б) y + xy + x^2 = 2.$$

3. Докажи дека функцијата $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ ја задоволува равенката $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$.

10. Монотоност и локални екстреми на функција

Да се потсетиме дека една функција е монотонно растечка ако од $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$, додека функцијата е монотонно опаѓачка ако од $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$. Испитувањето на монотоноста на функциите само со помош на дефиницијата на монотоност понекогаш може да биде многу тешко. Во овој дел од модуларната единица ќе видиме како со помош на извод на едноставен начин можеме да ја определиме монотоноста на функциите во некои интервали од дефиниционата област за функцијата.

Теорема 1. Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна на интервалот (a, b) каде што $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

- 1) Ако $y = f(x)$ монотонно расте на интервалот (a, b) тогаш $f'(x) > 0$ за секој $x \in (a, b)$;
- 2) Ако $y = f(x)$ монотонно опаѓа на интервалот (a, b) тогаш $f'(x) < 0$ за секој $x \in (a, b)$;

Доказ: Првиот извод на функцијата $y = f(x)$ е дефиниран со $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Ако претпоставиме дека $\Delta x > 0$ и во дефиницијата на првиот извод на функцијата $y = f(x)$ замениме $x = x_0$ и $x + \Delta x = x_1$, т.е. $x_0 < x_1$, првиот извод во точката x_0 ќе биде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1. Нека $y = f(x)$ монотонно расте на интервалот (a, b) . Тогаш за $x_0, x_1 \in (a, b)$ такви што $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1)$ ќе следува дека $f(x_1) - f(x_0) > 0$. Оттука имаме $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$, од каде $f'(x) > 0$ за $x \in (a, b)$.
2. Нека $y = f(x)$ монотонно опаѓа на интервалот (a, b) . Тогаш за $x_0, x_1 \in (a, b)$ такви што $x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) > f(x_1)$ ќе следува дека $f(x_1) - f(x_0) < 0$. Оттука имаме $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$, од каде $f'(x) < 0$ за $x \in (a, b)$. ■

Важи и обратното тврдење на тврдењето во теорема 1.

Теорема 2: Нека функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна на интервалот (a, b) каде што $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1. Ако $f'(x) > 0$ за секој $x \in (a, b)$, тогаш $y = f(x)$ монотонно расте на интервалот (a, b) ;
2. Ако $f'(x) < 0$ за секој $x \in (a, b)$, тогаш $y = f(x)$ монотонно опаѓа на (a, b) .

Доказ: Првиот извод на функцијата $y = f(x)$ е дефиниран со $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Ако претпоставиме дека $\Delta x > 0$ и во дефиницијата на првиот извод на функцијата $y = f(x)$ замениме $x = x_0$ и $x + \Delta x = x_1$, т.е. $x_0 < x_1$, првиот извод во точката x_0 ќе биде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

1. Нека $f'(x) > 0$ за $x \in (a, b)$. Од дефиницијата на прв извод следува дека $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Бидејќи $\Delta x > 0$, следува дека $f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1) - f(x_0) > 0$, т.е. $f(x_1) > f(x_0)$ односно функцијата $y = f(x)$ монотонно расте за $x \in (a, b)$.

2. Нека $f'(x) < 0$ за $x \in (a, b)$. Од дефиницијата на прв извод следува дека

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0. \quad \text{Бидејќи} \quad \Delta x > 0, \quad \text{следува} \quad \text{дека}$$

$f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_1) - f(x_0) < 0$, т.е. $f(x_1) < f(x_0)$ односно функцијата $y = f(x)$ монотонно опаѓа за $x \in (a, b)$. ■

Пример 1 ➤ За функцијата $y = x^3$, првиот извод имаме: $y' = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Бидејќи изводот е поголем од нула за секој $x \in \mathbb{R}$, оваа функција е монотонно растечка за секој $x \in \mathbb{R}$ (слика 5).



Слика 5

Пример 2 ➤ За функцијата $y = x^2 - 2x + 1$ ќе ги определиме интервалите на растење и опаѓање. Го бараме првиот извод на функцијата: $y' = 2x - 2$.

1. $y' = 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, значи функцијата расте на интервалот $(1, \infty)$.
2. $y' = 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$, значи функцијата опаѓа на интервалот $(-\infty, 1)$.
3. $y' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Точката x_0 во која за првиот извод важи $y' = f'(x) = 0$ се нарекува стационарна точка. Во нашиот пример точката $x_0 = 1$ е стационарна точка.

Пример 3 ➤ За функцијата $y = x^3 - 3x$ ќе ги определиме интервалите на растење и опаѓање. Го бараме првиот извод на функцијата: $y' = 3x^2 - 3$.

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

За да ги добиеме стационарните точки, пресметуваме: $y' = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$ од каде добиваме дека $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Понатаму,

$$y' > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Значи функцијата расте во интервалот $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

$$y' < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1).$$

Значи функцијата опаѓа во интервалот $(-1, 1)$.

1 Определи ги стационарните точки и интервалите на растење и опаѓање за функцијата

а) $y = x^2 - 1$;

б) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Пример 4 За функцијата $y = \frac{x^2}{x-2}$ да ги определиме интервалите на растење и опаѓање. Го пресметуваме првиот извод на функцијата: $y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

Овде да забележиме дека $(x-2)^2 > 0$, за секој $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$y' > 0 \Leftrightarrow x(x-4) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty).$$

Значи функцијата расте во интервалите $(-\infty, 0)$ и $(4, \infty)$.

Од,

$$y' < 0 \Leftrightarrow x(x-4) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4),$$

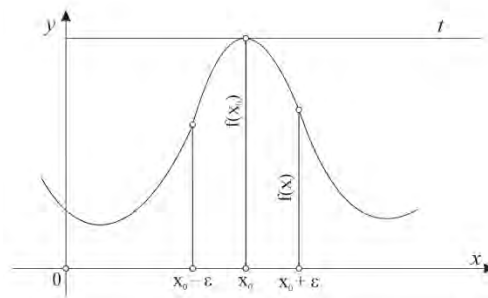
следува дека функцијата опаѓа во интервалот $(0, 4)$.

2 Определи ги интервалите на растење и опаѓање за функцијата:

а) $y = x^2 e^x$;

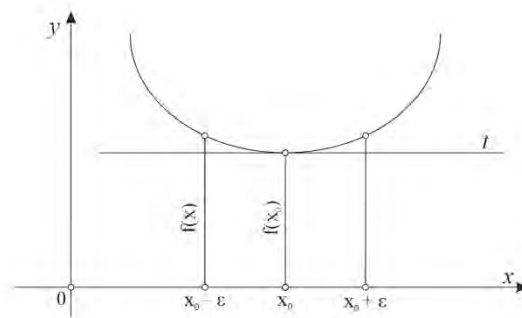
б) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

Нека $y = f(x)$ е дефинирана на интервалот (a, b) и нека $x_0 \in (a, b)$. Велиме дека функцијата $f(x)$ има локален максимум во точката x_0 , ако постои ε -околина на x_0 така што $f(x) < f(x_0)$ за секој $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, (слика 6).



Слика 6

Нека $y = f(x)$ е дефинирана во интервалот (a, b) и нека $x_0 \in (a, b)$. Велиме дека функцијата $f(x)$ има локален минимум во точката x_0 , ако постои ε -околина на x_0 така што $f(x) > f(x_0)$ за секој $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, (слика 7).



Слика 7

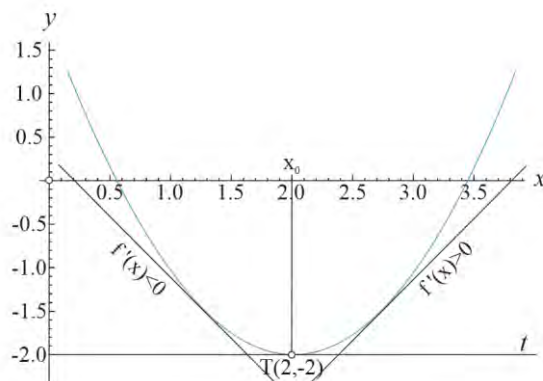
Локалниот минимум и локалниот максимум на една функција се викаат **локални екстрими на функцијата**.

Точката x_0 во која функцијата $y = f(x)$ има локален екстрем, ја разделува дефиниционата област на функцијата на интервал на растење и интервал на опаѓање, т.е. ако за $\delta > 0$, функцијата расте (опаѓа) во интервалот $(x_0 - \delta, x_0)$, тогаш ќе опаѓа (расте) во интервалот $(x_0, x_0 + \delta)$.

Пример 5

Одреди ги локалните екстрими на функцијата $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Прво ќе ги определиме интервалите на монотоност. Имаме: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$ и во овој интервал функцијата расте. Додека кога $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$ и во овој интервал функцијата опаѓа, (слика 8). Значи во точката $x_0 = 2$, првиот извод го менува знакот од негативен во позитивен, па во оваа точка функцијата има локален минимум.



Слика 8

Теорема 3: Ако функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна на интервалот (a, b) и ако $f(x_0)$ е локален екстрем за некој $x_0 \in (a, b)$, тогаш

Обратното тврдење не мора да биде точно, од каде може да заклучиме дека е потребен, но, не и доволен услов за постоење на локален екстрем во точката x_0 . Значи потребно е определување на дополнителни услови со чие исполнување ќе се гарантира постоењето на локален екстрем во дадена точка. Како пример можеме да ја разгледаме функција $y = x^3 + 3x$. Првиот извод на оваа функција е секогаш позитивен, т.е. $y' = 3x^2 + 3 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, што значи дека оваа функција монотонно расте на целата реална права. Ова значи дека нема ниту минимум ниту максимум. Исто така и функцијата $y = x^3$ монотонно расте на целата реална права што значи дека нема ниту минимум ниту максимум, но во точката $x_0 = 0$, $f'(0) = 0$.

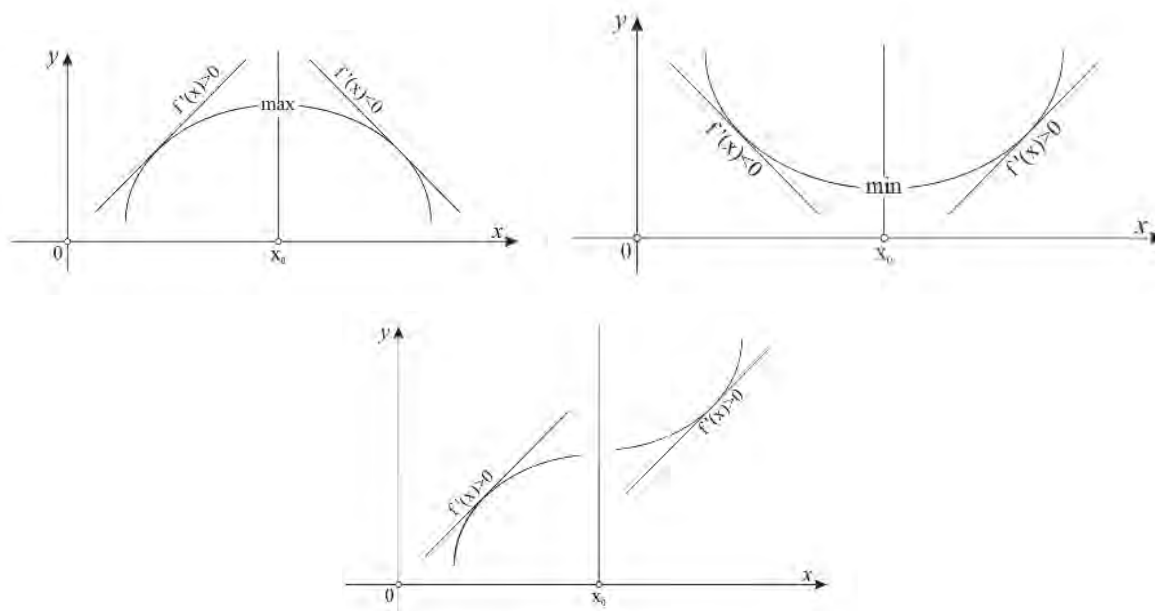
Теорема 4: Ако функцијата $y = f(x)$ е диференцијабилна на интервалот (a, b) и за некоја точка $x_0 \in (a, b)$ важи:

- 1) $f'(x_0) = 0$,
- 2) $f'(x)$ го менува знакот во околина на x_0

тогаш $f(x_0)$ е локален екстрем на функцијата $f(x)$.

Значи ќе ги имаме следниве три ситуации:

Ако $f'(x)$ го менува знакот од позитивен во негативен, тогаш функцијата има локален максимум. Додека ако $f'(x)$ го менува знакот од негативен во позитивен тогаш има локален минимум. А ако не го менува знакот тогаш нема екстремна вредност, (слика 9).



Слика 9

Пример 6

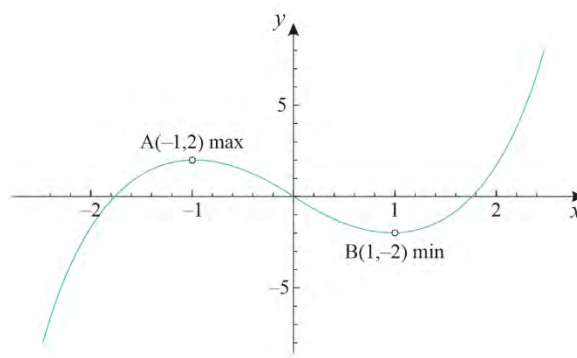
За функцијата $y = x^3 - 3x$ од пример 3, да ги најдеме локалните екстрими. Видовме дека $f'(x) > 0$ во интервалите $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Додека $f'(x) < 0$ во интервалот $(-1, 1)$.

Значи во интервалот $(-\infty, -1)$ функцијата расте, а во интервалот $(-1, 1)$ функцијата опаѓа. Во точката $x = -1$, првиот извод го менува знакот од позитивен во негативен. Па во оваа точка функцијата има локален максимум, $y_{\max} = f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$.

Оттука следува дека функцијата има локален максимум во точката $A(-1, 2)$.

На интервалот $(-1, 1)$ функцијата опаѓа, а во интервалот $(1, \infty)$ функцијата расте. Значи во точката $x = 1$, првиот извод го менува знакот од негативен во позитивен, па во оваа точка функција има локален минимум $y_{\min} = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$.

Значи функцијата има минимум во точката $B(1, -2)$. (слика 10)



Слика 10

3 Определи ги локалните екстреми на функцијата

а) $y = x^3 - x^2 - x - 1$;

б) $y = -3x^2 - 6x + 1$.

Пример 7 Да ги определиме локалните екстреми на функцијата $y = \sqrt[3]{x^2}$. За оваа функција дефинициона област е целото множество од реални броеви, т.е. $D_f = \mathbb{R}$.

$$y' = \left(x^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty), \text{ и } y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

Проблемот овде е тоа што првиот извод не е дефиниран за $x = 0$, но бидејќи 0 припаѓа во дефиниционата област на функција тоа не значи дека функцијата во $x = 0$ нема да има екстремна вредност, во овој случај минимум.

Понекогаш одредувањето на знакот на првиот извод не е едноставна задача. Со примена на вториот извод задачите од овој вид стануваат доста поедноставни. Да претпоставиме дека функцијата има прв и втор извод во околина на точката x_0 . Како што со помош на првиот извод определувавме дали функцијата расте или опаѓа во околина на точката x_0 , така и со вториот извод ќе определиме дали $f'(x)$ расте или опаѓа.

Ако во точката x_0 функцијата има максимум, тогаш нејзиниот прв извод $f'(x)$ во околина на точката x_0 опаѓа. Тоа значи дека изводот на функцијата $f'(x)$ е негативен. т.е. $(f'(x))' = f''(x) < 0$ во околина на точката x_0 .

Ако во точката x_0 функцијата има минимум, тогаш нејзиниот прв извод $f'(x)$ во околина на точката x_0 расте. Тоа значи дека изводот на функцијата $f'(x)$ е позитивен, т.е. $(f'(x))' = f''(x) > 0$ во околина на точката x_0 .

Значи можеме да го заклучиме следново правило:

Нека функцијата $f(x)$ има прв и втор непрекинат извод во околина на точката x_0 , и нека $f'(x_0) = 0$. Тогаш функцијата има локален екстрем во точката x_0 и:

1. Ако $f''(x_0) < 0$ функцијата има локален максимум,
2. Ако $f''(x_0) > 0$ функцијата има локален минимум,
3. Ако $f''(x_0) = 0$, вториот извод не можеме да го искористиме за одредување на екстремната вредност, во овој случај ќе го испитуваме знакот на првиот извод на функцијата.

Пример 8

Ќе ги определиме локалните екстрими на функцијата $y = x^3 - 3x^2$.

Ако го пресметаме првиот извод и го изедначиме со 0, добиваме:

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ или } x = 2,$$

т.е. функцијата ќе има екстремни вредности во точките $x = 0$ и $x = 2$.

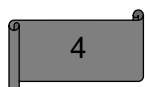
Со пресметување и оценка на вториот извод добиваме:

$$y'' = 6x - 6, \text{ за } x = 0, \quad y''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0,$$

значи функцијата има максимум во точката $x = 0$, $y_{\max} = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.

$$y''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0,$$

значи функција има минимум во точката $x = 2$, $y_{\min} = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$.



Опреди ги локалните екстрими на функцијата:

а) $y = x^4 + 2x^2 - 1$;

б) $y = 3x^5 - 5x^3$.

Да заклучиме дека за определување на екстремни вредности на функции кои се двапати диференцијабилни ги користиме следниве правила:

1. Се одредува првиот извод $f'(x)$ на функцијата,
2. За определување на стационарните точки се решава равенката $f'(x) = 0$,
3. Се одредува вториот извод $f''(x)$ и се испитува неговиот знак за секоја стационарна точка.

Пример 9

Да ги определиме екстремните вредности на функцијата $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}$.

Ако го пресметаме првиот извод и го изедначиме со 0, добиваме:

$$y' = x^4 - x^3 = x^3 \cdot (x - 1),$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3 \cdot (x - 1) = 0,$$

следува дека функцијата ќе има екстремни вредности во точките $x = 0$ или $x = 1$.

Со пресметување и оценка на вториот извод добиваме:

$y'' = 4x^3 - 3x^2$, за $x = 0$, $y''(0) = 0$, од каде не можеме ништо да заклучиме за добиената стационарна точка.

Бидејќи,

$$y''(1) = 1 > 0,$$

значи функција има локален минимум во точката $x = 1$, $y_{\min}(1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20}$.

Бидејќи,

$$y''(0) = 0,$$

значи не можеме да определиме дали во точката $x = 0$, функцијата има екстрем преку вториот извод. Треба да го испитаме однесувањето на првиот извод во таа точка.

За $f'(x) > 0$, $x^3 \cdot (x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 < 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$, т.е. функцијата монотонно расте.

Додека за вредности за $f'(x) < 0$, $x^3 \cdot (x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 < 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, 1)$, т.е. функцијата монотонно опаѓа.

Првиот извод на функцијата во $x = 0$ го менува знакот, па оттука следува дека во точката $x = 0$, функцијата има локален максимум.

Задачи за самостојна работа

1. Определи ги интервалите на растење и опаѓање на функцијата:

а) $y = 2x - x^2 + 5$;

б) $y = x^2 + 2x - 3$;

в) $y = 5x^3 - 7x^2 + 2$;

г) $y = -x^3 + 3x^2 + 1$;

д) $y = \frac{2x-1}{3x+4}$;

ѓ) $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$;

е) $y = \ln \sqrt{1+x^2}$.

2. Определи ги локалните екстреми на функцијата:

а) $y = 2x - 5$;

б) $y = x^2 - 5x + 3$;

в) $y = \frac{x^5}{5} - x^4 + x^3$;

г) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$;

д) $y = x^3(x-1)$;

ѓ) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

е) $y = x^2 e^x$;

ж) $y = \ln x + \frac{1}{x}$;

з) $y = \frac{x}{x^2+x+1}$;

с) $y = \frac{x^2-7}{x+4}$.

3. Одреди го параметарот a во функцијата $f(x) = ax^2 - 4x + 2$ така што таа да има

а) локален минимум во $x = 2$,

б) локален минимум во $x = 4$.

4. Одреди ги параметрите a и b во функцијата $f(x) = ax^3 + bx^2 - 36x - 1$ така што таа да има локален минимум во $x = 3$, а локален максимум во $x = -2$.

11. Конвексност/конкавност и превојни точки на функција

Видовме дека првиот извод можеме да го искористиме за испитување на монотоност на дадена диференцијабилна функција. На сличен начин со помош на вториот извод можеме да ја разгледаме „искривеноста на кривата“ $y = f(x)$ во даден интервал.

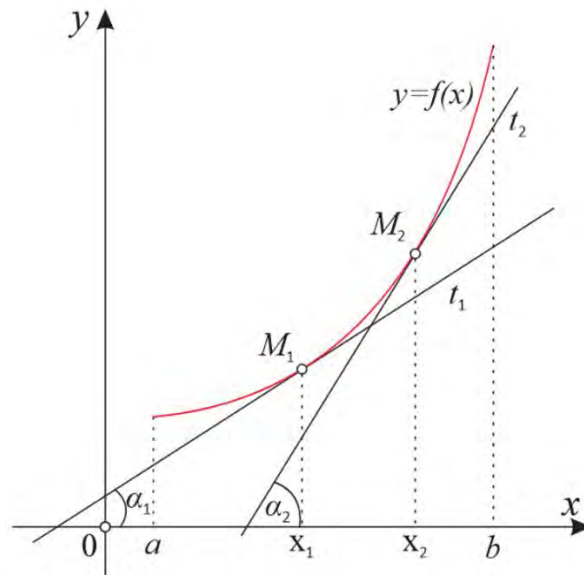
Теорема 1: Нека функцијата $y = f(x)$ има прв и втор непрекинат извод во интервалот (a, b) .

1. Ако $f''(x) < 0$ за секој $x \in (a, b)$, тогаш графикот на функцијата е конвексен (испакнат) во тој интервал.

2. Ако $f''(x) > 0$ за секој $x \in (a, b)$, тогаш графикот на функцијата е конкавен (вдлабнат) во тој интервал.

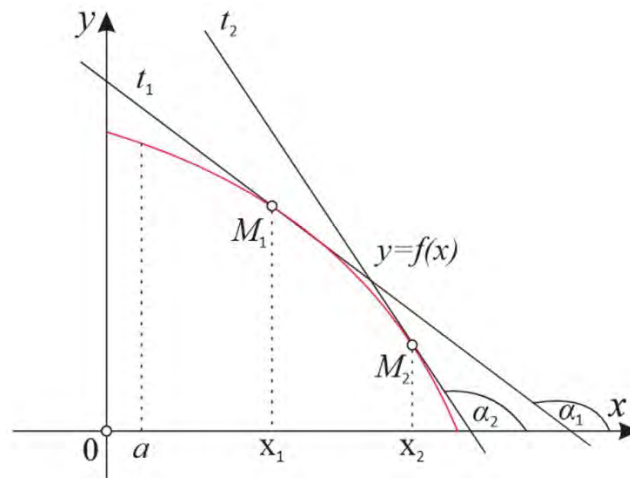
Оваа теорема ни помага да ја одредиме природата на закривеност на графикот на функцијата $y = f(x)$.

Да ја разгледаме кривата $y = f(x)$, која е диференцијабилна на интервалот (a, b) (слика 11 и слика 12). Нека $M_1(x_1, f(x_1))$ и $M_2(x_2, f(x_2))$ се две произволни точки од кривата, така што $x_1 < x_2$. Нека тангентите во точките M_1 и M_2 се правите t_1 и t_2 и α_1 и α_2 се аглиите што тангентите ги зафаќаат со позитивниот дел на x -оската (слика 11 и слика 12).



Слика 11

На слика 11 е претставена конкавна (вдлабната) крива на интервалот (a, b) . Можеме да забележиме дека со зголемување на вредноста на x се зголемува и аголот што соодветната тангента го зафаќа со позитивниот дел на x -оската, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$. Бидејќи $f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$ и $f'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha_2$ и бидејќи $\operatorname{tg} \alpha$ е растечка функција следува дека и $f'(x)$ е растечка функција на (a, b) , значи имаме $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$, па изводот на функцијата $f'(x)$ е позитивен во интервалот (a, b) т.е. $f''(x) > 0$.



Слика 12

На слика 12 е претставена конвексна (испакната) крива на интервалот (a, b) . Можеме да забележиме дека со зголемување на вредноста на x се намалува аголот што соодветната тангента го зафаќа со позитивниот дел на x -оската, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha_1 > \alpha_2$.

Бидејќи $f'(x_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$ и $f'(x_2) = \operatorname{tg} \alpha_2$ и бидејќи $\operatorname{tg} \alpha$ е растечка функција следува дека и $f'(x)$ е растечка функција на (a, b) , значи имаме $x_1 < x_2 \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$, па изводот на функцијата $f'(x)$ е негативен во интервалот (a, b) т.е. $f''(x) < 0$.

Пример 1

Да ги определиме интервалите на конкавност и конвексност на кривата $y = x^3$. Првиот и вториот извод на функција се $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. Функцијата е конкавна кога $y'' = 6x > 0 \Rightarrow x > 0$. Значи во интервалот $(0, \infty)$ кривата е конкавна (вдлабната). Додека функцијата ќе биде конвексна (испакната) кога $y'' = 6x < 0 \Rightarrow x < 0$, т.е. на интервалот $(-\infty, 0)$.

1

Опреди ги интервалите на конвексност и конкавност за функцијата:

а) $y = x^3 - 1$;

б) $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$.

Пример 2

Да ги определиме интервалите на конкавност и конвексност на кривата $y = x^2 + 2 \ln x$.

Првиот и вториот извод на функција се:

$$y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^2 - 2}{x^2} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\Rightarrow y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$$

Функцијата е конкавна во интервалите $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$. Додека функцијата ќе биде конвексна на интервалот $(-1, 1)$.

2

Опреди ги интервалите на конкавност и конвексност за функцијата

а) $y = \ln x, x \in (0, \infty)$;

б) $y = e^{-x^2}$.

Дефиниција 1: Точките од кривата кои го делат интервалот во кој кривата е конкавна/конвексна од интервалот во кој кривата е конвексна/конкавна се викаат **превојни точки**.

Значи во превојната точка x_0 , кривата го менува својот облик од конкавна (вдлабната) во конвексна (испакната) или обратно, што значи дека за функцијата $y = f(x)$, кога x поминува од лево надесно преку x_0 го менува знакот, па доколку постои вториот извод тогаш $f''(x_0) = 0$. Од сето ова можеме да заклучиме:

Потребен услов кривата $y = f(x)$ да има превојна точка во x_0 е $f''(x_0) = 0$, а доволен услов е $f''(x)$ да го менува знакот во околина на точката x_0 .

Пример 3

Ќе ги определиме превојните точки на графикот на функцијата $y = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

$$y' = 3x^2 - 6x + 5, y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

За интервалите за конкавност и конвексност имаме:

$$y'' > 0 \Rightarrow x - 1 > 0, x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, \infty)$$

$$y'' < 0 \Rightarrow x - 1 < 0, x < 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1).$$

Во околина на точката $x = 1$, вториот извод го менува знакот.

$$y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 1 = 2, \text{ па превојната точка е } P(1, 2).$$

3

Опреди ги превојните точки на функцијата:

а) $y = x^3 - x^2 - x - 1$;

б) $y = x^4 - 3x^3 + 1$.

Кога функцијата $y = f(x)$ има втор извод, превојните точки на функцијата се определуваат во следниве чекори:

1. Се наоѓа $f''(x)$;
2. Се решава равенката $f''(x) = 0$;
3. Се испитува знакот на $f''(x)$, во околина на превојните точки.

Пример 4

Да ги определиме превојните точки на функцијата $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Според наведените чекори погоре, ќе го определиме прво првиот извод на функцијата:

$$y' = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Потоа, ќе го определиме вториот извод на функцијата:

$$y'' = \frac{-4x(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) \cdot 2x \cdot (2 - 2x^2)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$y'' = \frac{(x^2 + 1)[-4x(x^2 + 1) - 4x(2 - 2x^2)]}{(x^2 + 1)^4}$$

$$y'' = \frac{-4x^3 - 4x - 8x + 8x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}.$$

Со изедначување на вториот извод на функцијата со 0, добиваме:

$$y'' = \frac{4x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 3) = 0$$

$$x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}.$$

Со испитување на знакот во околина на превојните точки се добива:

$$x \in (-\infty, -\sqrt{3}), f''(x) < 0 \Rightarrow \text{функцијата е конвексна,}$$

$$x \in (-\sqrt{3}, 0), f''(x) > 0 \Rightarrow \text{функцијата е конкавна,}$$

$$x \in (0, \sqrt{3}), f''(x) < 0 \Rightarrow \text{функцијата е конвексна,}$$

$$x \in (\sqrt{3}, \infty), f''(x) > 0 \Rightarrow \text{функцијата е конкавна.}$$

Бидејќи лево и десно од точките $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$, вториот извод на функцијата има различни знаци, следува дека овие точки се превојни точки,

$$P_1\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right), P_2(0, 0), P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

За поголема прегледност добиените резултати ќе ги внесеме во табела:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	конвексна	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	конкавна	0	конвексна	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	конкавна

Задачи за самостојна работа

1. Определи ги интервалите на конвексност и конкавност на кривата:

а) $y = 2x^3 - x^2 + 5$;

б) $y = 4x^4 - 4x^3 - 4$;

в) $y = 3x^5 - 5x^4 + 2$;

г) $y = 2x^4 - 12x^2$.

2. Определи ги превојните точки на кривата:

а) $y = \frac{x}{x+1}$;

б) $\frac{x}{x^2+1}$.

3. Определи ги интервалите на конвексност и конкавност на кривата и одреди ги превојните точки

а) $y = \frac{x^3}{x^2-1}, x \neq \pm 1$

б) $y = \frac{x^2-2x}{x+1}, x \neq -1$;

в) $y = x \ln^2 x, x > 0$;

г) $y = x^2 e^x$;

д) $y = x e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0$;

ѓ) $y = x^2 \ln x, x > 0$.

12. Испитување на тек и скицирање на график на функција

За да го нацртаме графикот на функцијата $y = f(x)$, потребно е прво да го анализираме текот на графикот на функцијата, преку следните чекори:

1. Дефиниционата област на функцијата;
2. Парноста/непарноста на функцијата и нејзината периодичност;
3. Пресечните точки на графикот на функцијата со координатите оски (нули, пресек со y -оската);
4. Асимптоти на функцијата;
5. Екстремни вредности и интервали на монотоност;
6. Превојни точки, конкавност и конвексност.

Графикот на функцијата го скицираме врз основа на добиените податоци за однесувањето на функцијата и за обликот на нејзиниот график. Наведената шема не мора да се следи

редоследно. Се препорачува сите податоци постепено да се внесуваат во табела, и воедно да се внесуваат и во координатниот систем.

Испитувањето на својствата на функцијата и скицирањето на нејзиниот график ќе го разгледаме преку неколку примери.

Пример 1

Да го испитаме и скицираме графикот на функцијата $y = 2x^2 - 3x + 1$.

1. Дефинициона област на функција

Функцијата е дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}$, па оттука $D_f = \mathbb{R}$.

2. Парност/непарност на функција

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1 \neq f(x).$$

Функцијата не е парна:

$$f(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1 = 2x^2 + 3x + 1 = -(-2x^2 - 3x - 1) \neq -f(x),$$

Функција не е непарна. Значи функцијата е ниту парна, ниту непарна.

3. Пресеци со координатите оски

Пресек со x -оската (нула на функцијата)

$$y = 0, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2} \text{ и } x_2 = 1.$$

Точките на пресек со x -оската се $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и $B(1, 0)$.

Пресек со y -оската

$$x = 0, \quad 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Точката на пресек со y -оската е $C(0, 1)$.

4. Асимптоти на функцијата

Хоризонтална асимптота нема, бидејќи:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = \infty.$$

Вертикална асимптота нема, бидејќи функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbb{R}$.

Коса асимптота е од обликот $y = kx + n$.

Бидејќи:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x} \right) = \infty,$$

следува дека графикот на функцијата нема коси асимптоти.

5. Екстремни вредности и интервали на монотоност

$$y' = 4x - 3,$$

$$y' = 0, 4x = 3, x = \frac{3}{4}$$

$$y'' = 4 > 0.$$

Значи функцијата за $x = \frac{3}{4}$ има локален минимум,

$$y_{\min} = y\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{8}.$$

Точката $D\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ е точка на локален минимум па графикот.

За монотоноста на функцијата имаме:

$y' = 4x - 3 > 0, 4x > 3, x > \frac{3}{4}$, т.е. за $x \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ функцијата расте,

$y' = 4x - 3 < 0, 4x < 3, x < \frac{3}{4}$, т.е. за $x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ функцијата опаѓа.

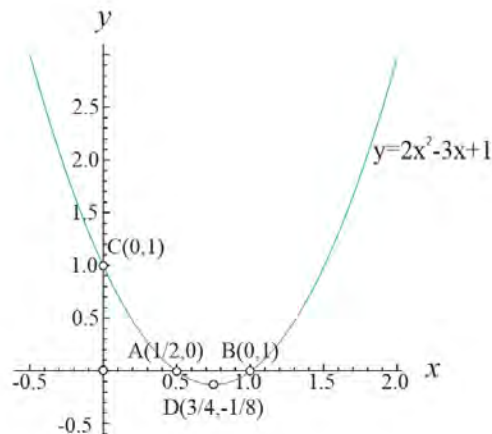
Ако испитувањето го направиме преку табела, добиваме:

x	$\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$
y'	- ↘	+ ↗

6. Превојни точки и интервали на закривеност

$y'' = 4 > 0$, за секој $x \in \mathbb{R}$, кривата нема превојни точки и на целиот интервал е конкавна (вдлабната), а нејзиниот график го има обликот “ $\cup$ ”.

Графикот на функцијата е даден на слика 13.



Слика 13

Пример 2

Да го испитае текот и да го скицираме го графикот на функцијата

$$y = x^4 - 4x^3.$$

1. Дефинициона област

Функцијата е дефинирана за секој $x \in \mathbb{R}$, па оттука $D_f = \mathbb{R}$.

2. Парност/непарност на функцијата:

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 \neq f(x)$$

Функцијата не е парна.

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 = x^4 + 4x^3 = -(-x^4 - 4x^3) \neq -f(x)$$

Функцијата не е непарна. Значи функцијата е ниту парна ниту непарна.

3. Пресеци со координатите оски

Пресек со x -оската (нула на функцијата)

$$y = 0, \quad x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0, \quad x_1 = 0 \text{ и } x_2 = 4.$$

Точките на пресек со x -оската се $A(0, 0)$ и $B(4, 0)$.

Пресек со y -оската:

$$x = 0, \quad 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0.$$

Точката на пресек со y -оската е $A(0, 0)$.

4. Асимптоти на функцијата

Хоризонтална асимптота нема бидејќи:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^4 - 4x^3) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty.$$

Вертикална асимптота нема бидејќи функцијата е дефинирана за секое $x \in \mathbb{R}$.

Косата асимптота е од облик $y = kx + n$. Бидејќи

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 - 4x^3}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 4x^2) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(1 - \frac{4}{x}\right) = \infty,$$

следува дека графикот на функцијата нема коси асимптоти.

5. Екстремни вредности и интервали на монотоност

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$$

$$y'' = 12x^2 - 24x.$$

За вториот извод на функцијата во точката $x_1 = 0$ имаме $y''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 = 0$, од каде не можеме да кажеме дали функцијата има локален екстрем во точката $x_1 = 0$.

За вториот извод на функцијата во точката $x_2 = 3$ имаме $y''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 > 0$, па следува дека функцијата во точката $x_2 = 3$ има локален минимум,

$$y_{\min} = y(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = -27.$$

Точката $C(3, -27)$ е точка на локален минимум.

Со испитување на знакот на првиот извод на функцијата добиваме:

$$y' = 4x^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow (x-3) > 0, x > 3, \text{ т.е. за } x \in (3, \infty) \text{ функцијата расте,}$$

$$y' = 4x^2(x-3) < 0 \Leftrightarrow (x-3) < 0, x < 3, \text{ т.е. за } x \in (-\infty, 3) \text{ функцијата опаѓа.}$$

Ако испитувањето го направиме преку табела, добиваме:

x	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
y'	- 	+ 

6. Превојни точки и интервали на закривеност

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2),$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 12x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2.$$

Вториот извод y'' го менува знакот при премин низ точките $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$, бидејќи $y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ т.е. во овие интервали функција е конкавна и

$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2) < 0, x \in (0, 2)$ т.е. во овие интервали функција е конвексна.

За точките $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$ имаме

$$y(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0,$$

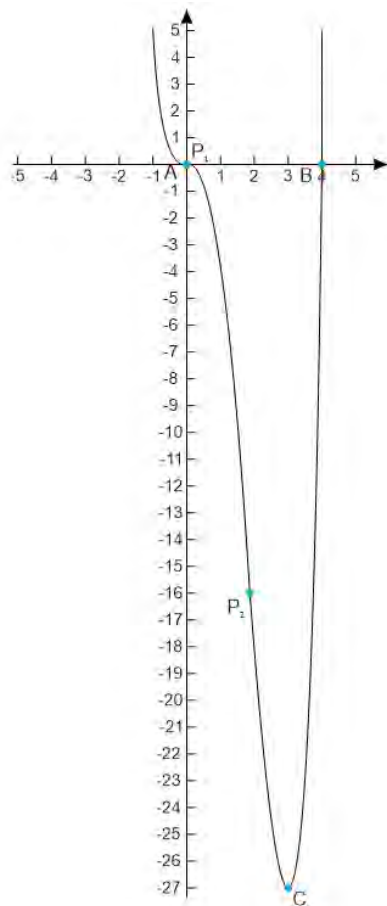
$$y(2) = 2^4 - 4 \cdot 2^3 = -16.$$

Превојни точки се $P_1(0, 0)$ и $P_2(2, -16)$.

За поголема прегледност добиените резултати ќе ги внесеме во табела:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
y''	+	-	+
y	конкавна	конвексна	конкавна

Графикот на функцијата е скициран на слика 14.



Слика 14

Пример 3

Да го испитаме текот и скицираме графикот на функцијата

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

1. Дефинициона област на функцијата:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{1} \Rightarrow x \neq \pm 1,$$

Функцијата е дефинирана за секој $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, па оттука $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

2. Парност/непарност на функцијата

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3}{x^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Функцијата е непарна, што значи дека нејзиниот график е симетричен во однос на координатниот почеток.

3. Пресеци со координатите оски

Пресек со x - оската (нула на функцијата)

$$y = 0, \quad \frac{x^3}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Точката на пресек со x - оската е $(0,0)$.

Пресек со y - оската

$$x = 0, \quad y(0) = \frac{0^3}{0^2 - 1} = 0,$$

Точката на пресек е $(0,0)$.

4. Асимптоти на функцијата

Хоризонтална асимптота нема бидејќи

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \right) = \frac{1}{0 - 0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

Вертикална асимптота:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \varepsilon)^3}{(1 + \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \varepsilon)^3}{(1 - \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \varepsilon)^3}{-\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \varepsilon)^3}{(-1 + \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (-2 + \varepsilon)} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{(-1 - \varepsilon)^3}{(-1 - \varepsilon)^2 - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-(1 + \varepsilon)^3}{\varepsilon \cdot (2 + \varepsilon)} = -\infty.$$

следува дека вертикални асимптоти се правите $x = 1$ и $x = -1$.

Косата асимптота има облик $y = kx + n$. Со одредување на коефициентот на правец и слободниот член добиваме:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^3 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{1}{1 - 0} = 1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{0}{1 - 0} = 0 \end{aligned}$$

Коса асимптота е правата $y = x$.

5. Екстремни вредности и интервали на монотоност

Од

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

добиваме дека

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x^2 - 3 = 0$$

т.е.

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}.$$

Вториот извод на функцијата е:

$$y'' = \left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} \right)' = \left(\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} \right)' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

За вториот извод на функцијата во точката $x_1 = 0$ имаме $y''(0) = 0$, од каде не можеме да кажеме дали функцијата има локален екстрем во точката $x_1 = 0$.

За вториот извод на функцијата во точката $x_2 = \sqrt{3}$ имаме $y''(\sqrt{3}) = \frac{12\sqrt{3}}{8^3} > 0$, од каде следува дека функцијата во точката $x_2 = \sqrt{3}$ има локален минимум,

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Точката $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ е точка на локален минимум.

За вториот извод на функцијата во точката $x_3 = -\sqrt{3}$ имаме $y''(-\sqrt{3}) = \frac{-12\sqrt{3}}{8^3} < 0$, од каде следува дека функцијата во точката $x_3 = -\sqrt{3}$ има локален максимум,

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Точката $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right)$ е точка на локален максимум.

Бидејќи $x^2 > 0$ и $(x^2-1)^2 > 0$ за секој $x \in \mathbb{R}$, имаме дека $y' > 0$ кога $x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, функцијата расте додека пак кога $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, функцијата опаѓа.

Видовме дека функцијата е непарна што значи дека графикот на функцијата е симетричен во однос на координатиот почеток. Затоа можеме да ги разгледуваме само позитивните вредности на x .

Ако испитувањето го направиме преку табела, добиваме:

	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$x^2 - 3$	-	+
y'	-	+
y		

6. Превојни точки и интервали на закривеност

$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3},$$

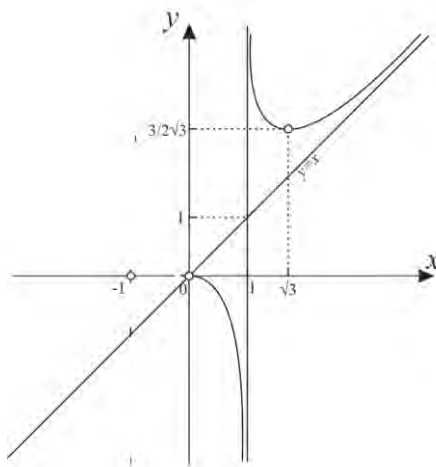
$$y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 3 = 0.$$

Равенката $x^2 + 3 = 0$ нема реални решенија, затоа ја имаме само точката $x = 0$ и $y(0) = 0$. Како кандидат за превојна точка е $P(0, 0)$.

За поголема прегледност и поедноставување имајќи предвид дека $x^2 + 3 > 0, \forall x \in D_f$ и функцијата е непарна ќе направиме табела:

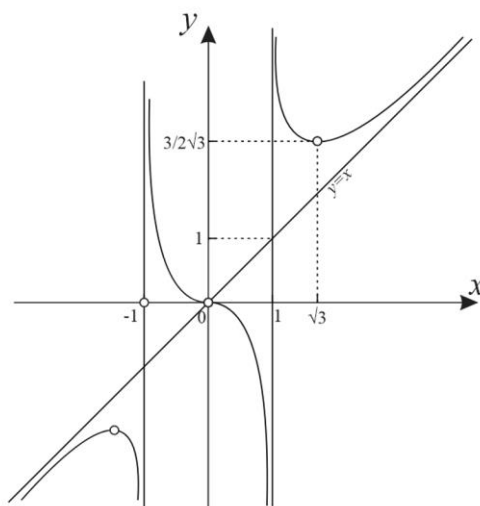
	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	+	+
$(x^2 - 1)^3$	-	+
y''	-	+
y	$\cap$	$\cup$

Сега можемо да го нацртаме графикот на функцијата. На слика 15 ќе биде даден графикот само за позитивните вредности на x .



Слика 15

Функцијата е непарна т.е. графикот на функцијата е симетричен во однос на координатиот почеток и тој го има обликот даден на слика 16:



Слика 16

Пример 4

Да го испитае текот и скицираме графикот на функцијата $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$.

1. Дефинициона област на функцијата

$$x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2,$$

Функцијата е логаритамска па мора $\frac{x+1}{x+2} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$.

Значи функцијата е дефинирана за $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ т.е.

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-1, \infty).$$

2. Парност/непарност на функцијата

$$f(-x) = \ln \frac{-x+1}{-x+2} = \ln \frac{1-x}{2-x}.$$

Функцијата не е ниту парна ниту непарна, тоа можеме да го заклучиме и поради тоа што дефиниционата област не е симетрична.

3. Пресеци со координатите оски

Пресек со x - оската (нула на функцијата)

$$y = 0, \quad \ln \frac{x+1}{x+2} = 0 = \ln 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x+2} = 1 \Rightarrow x+1 = x+2 \Rightarrow 0 \cdot x = 1,$$

што значи дека функцијата нема нули.

Пресек со y - оската

Функцијата има пресек со y - оската, бидејќи за $x = 0$ функцијата има вредност

$$y(0) = \ln \frac{1}{2}.$$

Точката која е пресек со y - оската е $A\left(0, \ln \frac{1}{2}\right)$.

4. Асимптоти на функцијата

Хоризонтална асимптота

Бидејќи

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \ln \frac{1+0}{1+0} = \ln 1 = 0,$$

следува дека $y = 0$ е хоризонтална асимптота.

Вертикална асимптота

Со одредување на граничната вредност на функцијата во точките во кои не е дефинирана функцијата, добиваме:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{-2-\varepsilon+1}{-2-\varepsilon+2} = \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1-\varepsilon}{-\varepsilon} = \infty,$$

па следува дека $x = -2$ е вертикална асимптота од лево.

Бидејќи,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{x+1}{x+2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln \frac{-1+\varepsilon+1}{-1+\varepsilon+2} = \ln \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} = -\infty,$$

па следува дека $x = -1$ е вертикална асимптота од десно.

Коса асимптота нема, бидејќи во правата $y = kx + n$, коефициентот $k = 0$, т.е.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+1}{x+2} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x+2} \right)^{-(x+2) \cdot \frac{1}{-x(x+2)}} = \\ &= \ln e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-x(x+2)}} = 0. \end{aligned}$$

5. Екстремни вредности и интервали на монотоност

Го определуваме првиот извод на функцијата:

$$y' = \left(\ln \frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \left(\frac{x+1}{x+2} \right)' = \frac{x+2}{x+1} \frac{(x+1)'(x+2) - (x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

За да го испитаме однесувањето на првиот извод на функцијата, ја составуваме табелата:

	$(-\infty, -2)$	$(-1, \infty)$
$x+1$	-	+
$x+2$	-	+
y'	+	+
y		

Функцијата расте на целата дефинициона област $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$, па функцијата нема екстремни вредности. Немањето на екстремни вредности се согледува и од тоа што во ниту една од дефиниционата област, првиот извод нема вредност 0.

6. Превојни точки и интервали на закривеност

Го одредуваме вториот извод на функцијата:

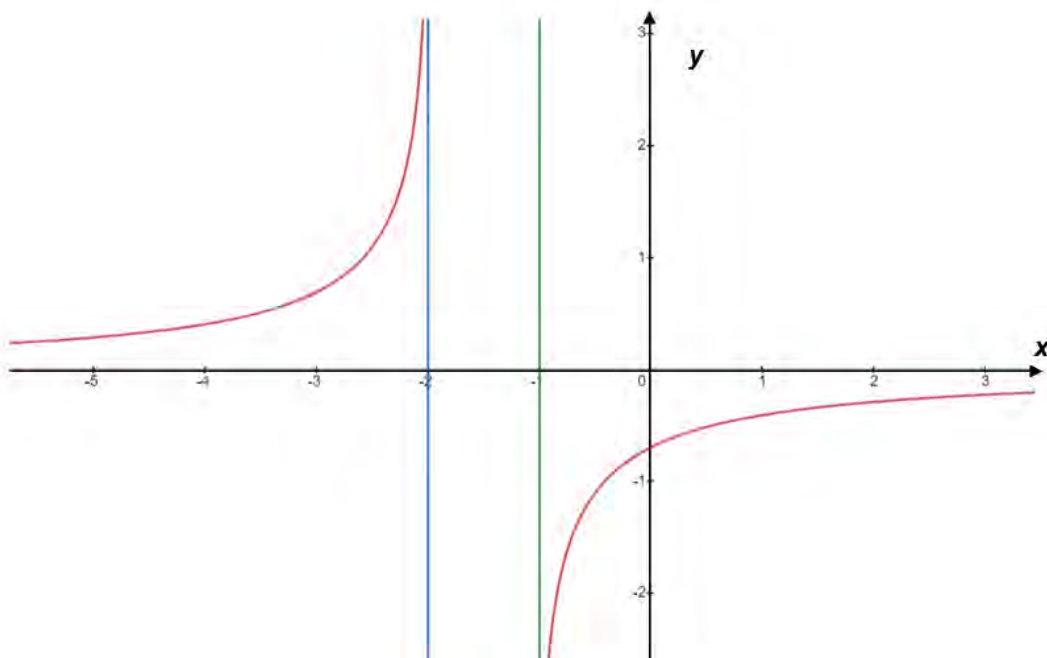
$$y'' = \left(\frac{1}{(x+1)(x+2)} \right)' = \left(\frac{1}{x^2+3x+2} \right)' = \left((x^2+3x+2)^{-1} \right)'$$

$$= -1 \cdot (x^2+3x+2)^{-2} (x^2+3x+2)' = \frac{-(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}.$$

За да го испитаме однесувањето на вториот извод на функцијата, ја составуваме табелата:

	$(-\infty, -2)$	$(-1, \infty)$
$2x+3$	-	+
-1	-	-
y''	+	-
y	$\cup$	$\cap$

Графикот на функцијата е даден на слика 17.



Слика 17

Задачи за самостојна работа

1. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; б) $y = x^3 - 3x + 2$;

в) $y = \frac{1}{1+x^2}$; г) $y = \frac{1-x^2}{x^2+1}$;

д) $y = \frac{x^2}{x^2-1}$; е) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;

е) $y = \frac{x^2+2x-1}{x^2}$; ж) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

2. Испитај го текот и скицирај го графикот на функцијата:

а) $y = x^2 e^x$; б) $y = e^{\frac{1}{x}}$;

в) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; г) $y = x - \ln x$.

13. Примена на извод за решавање на проблеми од екстреми

Овде ќе дадеме примери во кои ќе ја разгледаме примената на првиот и вториот извод за решавање на практични проблеми.

Пример 1

Нека периметарот на еден правоаголник е 20 единици. Колкава треба да биде должината на страните на правоаголникот за да плоштината биде најголема?

Нека страните на правоаголникот ги означиме со a и b . Од формулата за периметар на правоаголник имаме $L = 2a + 2b$. Значи:

$$2a + 2b = 20 \Rightarrow a + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a.$$

Плоштина на правоаголник се пресметува по формулата $P = a \cdot b$. Со замена на $b = 10 - a$, добиваме:

$$P(a) = a(10 - a) = 10a - a^2.$$

$$P'(a) = 10 - 2a = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5.$$

За да провериме дали за добиената вредност на должината на страната a , плоштината е најголема, мораме да го најдеме вториот извод.

Вториот извод $P''(5) = -2 < 0$, т.е. во било која точка е помал од нула. Заклучуваме дека за $a = 5$ единици плоштината е максимална.

Страната $b = 10 - a = 10 - 5 = 5$ единици.

Значи најголема плоштина од сите правоаголници со ист периметар има квадратот со страна $a = 5$, и плоштината е $P = 5 \cdot 5 = 25$ квадратни единици.

Пример 2

Нека должината на една отсечка е 20 см. Да се подели отсечката на два дела, така што збирот на кубовите на двата дела да е најмал.

Нека деловите од отсечката ги означиме со a и b .

Имаме дека $a + b = 20 \Rightarrow b = 20 - a$.

Со S да го означиме збирот од нивните кубови:

$$S = a^3 + b^3$$

$$S(a) = a^3 + (20 - a)^3.$$

$$S'(a) = 3a^2 + 3(20 - a)^2(20 - a)' = 3a^2 - 3(20 - a)^2$$

$$= 3a^2 - 3(400 - 40a + a^2) = 120a - 1200$$

$$S'(a) = 120a - 1200 = 0 \Rightarrow a = 10.$$

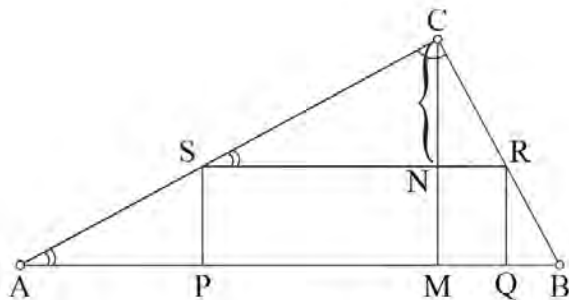
$$S''(10) = 120 > 0$$

Значи за $a = 10$, S има најмала вредност, па деловите од отсечката се 10 и 10.

Пример 3

Во правоаголен триаголник со страни 15, 20 и 25 е впишан правоаголник така што две темиња на правоаголникот лежат на хипотенузата на триаголникот. Колкава е максималната плоштина на впишаниот правоаголник?

Темињата на триаголникот ќе ги означиме со A, B и C , а на правоаголникот со P, Q, R и S (слика 18). Плоштината на правоаголникот е $P = \overline{PQ} \cdot \overline{RQ}$. Од условот на задача имаме $\overline{AB} = 25, \overline{BC} = 15, \overline{AC} = 20$ и страните на правоаголникот да ги означиме со $\overline{PQ} = a, \overline{RQ} = b$. Нека $\overline{CM}$ е висината спуштена кон хипотенузата на триаголникот ABC и $\overline{CN}$ е висината спуштена кон хипотенузата на триаголникот SRC . Да ја најдеме зависноста меѓу $\overline{PQ} = a$ и $\overline{RQ} = b$. Од слика 18 гледаме дека: $\triangle ABC \sim \triangle SRC$. Од сличноста на триаголниците следува дека соодветните страни се пропорционални.



Слика 18

$$\triangle ABC \sim \triangle SRC,$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{SR}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}$$

Да го најдеме сега $\overline{CM}$.

Плоштината на $\triangle ABC$ може да се пресмета на два начина:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CM}}{2} &= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} \\ 25 \cdot \overline{CM} &= 15 \cdot 20 \\ \overline{CM} &= 12. \end{aligned}$$

Да замениме во пропорцијата:

$$\frac{25}{a} = \frac{12}{\overline{CN}}.$$

Останува да го најдеме $\overline{CN}$, $\overline{CN} = \overline{CM} - \overline{MN} = 12 - \overline{RQ} = 12 - b$, бидејќи $\overline{MN} = \overline{RQ}$

$$\begin{aligned} \frac{25}{a} &= \frac{12}{12-b}, \\ 12a &= 25(12-b), \\ a &= \frac{25}{12}(12-b). \end{aligned}$$

За плоштината на правоаголникот имаме:

$$P = a \cdot b = \frac{25}{12}(12 - b)b,$$
$$P(b) = \frac{25}{12}(12b - b^2).$$

Следно, да го најдеме првиот извод на $P(b)$:

$$P'(b) = \frac{25}{12}(12 - 2b),$$
$$P'(b) = 0$$
$$\frac{25}{12}(12 - 2b) = 0$$
$$b = 6,$$
$$P''(6) = -\frac{25}{6} < 0.$$

Значи за $b = 6$ плоштината на правоаголникот е максимална. Останува уште да се најде страна a и максималната плоштина.

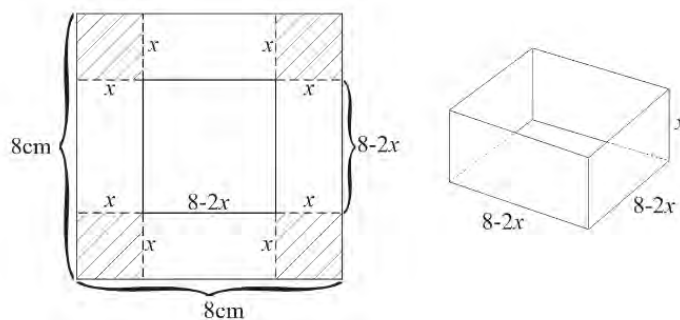
$$a = \frac{25}{12}(12 - 6) = \frac{25}{2},$$
$$P = ab = 6 \cdot \frac{25}{2} = 75.$$

Значи максималната плоштина на вака впишаниот правоаголник во правоаголен триаголник е 75.

Пример 4

Од парче картон во форма на квадрат со страна 8 см, кај секој агол се отсекува по еден квадрат (како на слика 19), и на тој начин се формира кутија. Ќе ги најдеме димензиите за кои кутијата ќе има најголем волумен.

Со x да ја означиме страната на квадратот што се отсекува од кутијата. Основата на кутијата ќе биде квадрат со страна $8 - 2x$, додека висината на кутијата ќе биде x , слика 19.



Слика 19

Кутијата преставува правилна четириаголна призма со волумен:

$$V = B \cdot H = (8 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V(x) = (64 - 32x + 4x^2) \cdot x = 4x^3 - 32x^2 + 64x.$$

Критичната вредност за x (максималната или минималната вредност) ќе ја добиеме кога првиот извод на функцијата $V(x)$ ќе го изедначиме на 0.

$$V'(x) = 12x^2 - 64x + 64$$

$$V'(x) = 0$$

$$4(3x^2 - 16x + 16) = 0$$

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 4.$$

Од друга страна должината на страната мора да биде позитивна, т.е.

$8 - 2x > 0 \Rightarrow -2x > -8 \Rightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$, значи x може да прима вредности од интервалот $(0, 4)$. Оттука единственото решение е $x_1 = \frac{4}{3}$.

Дали за оваа вредност волуменот е максимален?

$$V''(x) = 24x - 64,$$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \cdot \frac{4}{3} - 64 = 32 - 64 = -32 < 0.$$

Можеме да заклучиме дека за $x = \frac{4}{3}$, волуменот е максимален и негова вредност е:

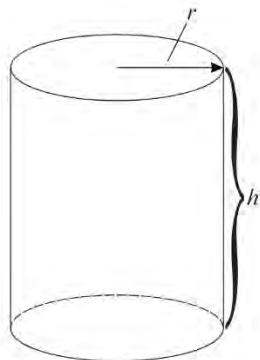
$$V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 32\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 64\frac{4}{3} = \frac{1024}{27} \approx 38.$$

За должината на страната на основата на кутијата се добива:

$$8 - 2x = 8 - 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3} - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \approx 5,33.$$

Пример 5

Производител на кутии за складирање на храна сака да направи конзерва во форма на цилиндар со волумен 1000 cm^3 . Ќе ги најдеме димензиите на цилиндарот за кои цената на конзервата во форма на цилиндар ќе биде најмала.

**Слика 20**

За да цената на конзервата биде најмала, треба да се најдат вредностите на радиусот и висината за кои плоштината на цилиндарот ќе биде најмала.

Нека h е висината на цилиндарот и r е радиусот на цилиндарот.

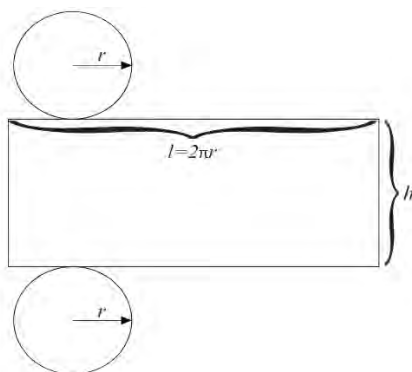
Волуменот на цилиндарот е $V = \pi r^2 h$.

Од формулата на волуменот ќе ја најдеме врската помеѓу r и h . Висината може да се изрази преку радиусот на следниот начин:

$$\pi r^2 h = 1000,$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Плоштината на цилиндарот е збир од плошина на основите ($r^2 \pi$) и плоштината на правоаголникот ($2r\pi h$) (слика 21):

**Слика 21**

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h,$$

$$P(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \frac{1000}{\pi r^2} = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}.$$

Сега плоштината е функција $P(r)$:

$$P(r) = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}.$$

Треба да се внимава, радиусот r да е поголем од нула ($r > 0$). Со наоѓање на првиот извод се добива

$$P'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2}.$$

За наоѓање на екстремната вредност, првиот извод го изедначуваме на нула.

$$4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$4r\pi = \frac{2000}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{2000}{4\pi}$$

$$r^3 = \frac{500}{\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,41 \text{ cm}.$$

За да најдеме дали за оваа вредност плоштина е минимална мора да го најдеме вториот извод:

$$P''(r) = 4\pi + \frac{4000}{r^3}.$$

$$P''(5,41) = 4\pi + \frac{4000}{(5,41)^3} > 0.$$

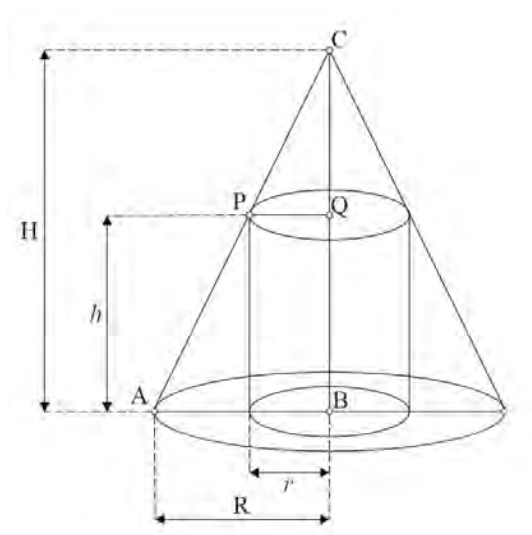
Значи за $r \approx 5,41 \text{ cm}$, плоштината на цилиндарот е минимална. За висината добиваме дека

е: $h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(5,41)^2} \approx 10,88 \text{ cm}$. Па минималната вредност на плоштината на цилиндарот е:

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h \approx 553,58 \text{ cm}^2.$$

Пример 6 Во прав конус со радиус на основата 4 cm и висина 6 cm впишан е цилиндар со максимален волумен. Ќе го најдеме волуменот на цилиндарот.

Нека H е висината на конусот и R е радиусот на основата на конусот, додека r и h се радиусот и висината на цилиндарот, соодветно. Волуменот на цилиндарот е $V = \pi r^2 h$. Потребно е волуменот да зависи само од една променлива r или h , односно да се изрази преку r или h .



Слика 22

Нека $\overline{AB} = R$, $\overline{PQ} = r$, а C е врвот на конусот. Од слика 22, можеме да видиме дека $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ и нивните соодветни страни се пропорционални. Па ја имаме следнава пропорција:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} &= \frac{\overline{BC}}{\overline{QC}}, \\ \frac{R}{r} &= \frac{H}{H-h}, \\ \frac{4}{r} &= \frac{6}{6-h}, \\ 6r &= 24 - 4h, \\ 4h &= 24 - 6r, \\ h &= 6 - \frac{3}{2}r.\end{aligned}$$

Сега во формулата за волумен на цилиндарот да ја замениме висината:

$$\begin{aligned}V(r) &= \pi r^2 \left(6 - \frac{3}{2}r \right), \\ V(r) &= \pi \left(6r^2 - \frac{3}{2}r^3 \right).\end{aligned}$$

Со наоѓање на првиот извод се добива

$$V'(r) = \pi \left(12r - \frac{9}{2} r^2 \right).$$

За наоѓање на екстремната вредност, првиот извод го изедначуваме на нула:

$$\pi \left(12r - \frac{9}{2} r^2 \right) = 0,$$

$$12r - \frac{9}{2} r^2 = 0,$$

$$24r - 9r^2 = 0,$$

$$3r(8 - 3r) = 0.$$

Добиваме дека $r_1 = 0$ или $r_2 = \frac{8}{3}$. Но ако $r_1 = 0$ тогаш и $V = 0$ по тоа не е најголемиот волумен. Значи единствена екстремна вредност се добива за $r_2 = \frac{8}{3}$ cm. За да видиме дали за оваа вредност волуменот е максимален го бараме вториот извод:

$$V''(r) = 12\pi - 9r\pi = 3\pi(4 - 3r),$$

$$V''\left(\frac{8}{3}\right) = 3\pi\left(4 - 3 \cdot \frac{8}{3}\right) = -12\pi < 0.$$

Значи за $r = \frac{8}{3}$ cm, волуменот на цилиндарот е максимален. За висината добиваме дека е:

$$h = 6 - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 2 \text{ cm.}$$
 Па максималната вредност на волуменот на цилиндарот е:

$$V = \pi r^2 h = 2\pi \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{128\pi}{9} \text{ cm}^3.$$

Пример 7

Производителот на маици, одредува дека за да продаде x нови маици, цената на една маица треба да биде изразена преку функцијата $p(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Производителот исто така определува дека трошоците за производство на x нови маици се дадени со функцијата $C(x) = 20 + 1,5x$. Производителот сака да ја најде цената за една маица за која ќе има максимална добивка.

Вкупниот трошок се пресметува со:

$$C(x) = \text{Фиксни трошоци} + (\text{Променливи трошоци}) \cdot (\text{Број на произведени единици})$$

Вкупниот приход се пресметува со: $R(x) = (\text{Број на единици}) \cdot (\text{Цена по единица})$

Вкупната добивка се пресметува со: $P(x) = \text{Вкупен приход} - \text{Вкупни трошоци}$.

За наоѓање на максималната добивка, треба прво да го најдеме првиот извод на функцијата на добивка $P(x)$, т.е. да го пресметаме $P'(x)$.

Стационарната точка ќе ја најдеме со решавање на равенката $P'(x) = 0$.

Цената по единица $p(x)$ е дадена со функцијата $p(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$.

Вкупните трошоци за производство на x маици се дадени со функцијата $C(x) = 20 + 1.5x$.

Вкупниот профит е $R(x) = x \cdot p = x \cdot \frac{16}{\sqrt{x}} = 16\sqrt{x}$.

Функцијата на добивка:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 16\sqrt{x} - (20 + 1.5x) \\ &= 16\sqrt{x} - 20 - 1.5x \\ &= 16\sqrt{x} - 1.5x - 20. \end{aligned}$$

За наоѓање на максималната добивка го бараме првиот извод на $P(x)$.

$$P'(x) = \frac{16}{2\sqrt{x}} - 1.5 = \frac{8}{\sqrt{x}} - 1.5.$$

За наоѓање на стационарната точка:

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{16}{2\sqrt{x}} - 1.5 = 0 \\ \frac{16}{2\sqrt{x}} &= 1.5 \\ 3\sqrt{x} &= 16 \\ \sqrt{x} &= \frac{16}{3} = 5.33 \\ x &= 5.33^2 = 28.44 \approx 28. \end{aligned}$$

За да видиме дали оваа вредност е максимална го бараме вториот извод:.

$$P''(x) = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} - 1.5 \right)' = -\frac{4}{\sqrt{x^3}}.$$

Бидејќи $P''(x)$ е негативен, добивката ќе биде максимална кога ќе се произведат 28 маици.

Максималната добивка е $P(28) = 16\sqrt{x} - 1.5x - 20 = 22,66$.

Значи, производителот прави максимална добивка од 22,66 парични единици кога ќе произведе 28 маици.

Цената на една маица треба да биде $p(x) = \frac{16}{\sqrt{28}} = 3$, за да се оствари максимална добивка.

Задачи за самостојна работа

1. Бројот 15 подели го на два собироци, така што нивниот производ да биде најголем.
2. Бројот 180 подели го на два собироци така што збирот на квадратот на првиот собирик помножен со два и квадратот на вториот собирик помножен со три да биде најмал.
1. Даден е триаголник со страна 10 cm и висина 4 cm. Во триаголникот е впишан правоаголник, така што две негови темиња лежат на дадената страна, а другите две на останатите страни на триаголникот. Најди ги страните на правоаголникот, така што плоштината на правоаголникот да биде најголема
2. Од парче картон во форма на правоаголник со страни 10 cm и 8 cm, од секое теме се отсекува по еден квадрат, и на тој начин се формира отворена кутија. Да се најдат димензиите за кои кутијата ќе има најголем волумен.
3. Од сите рамнокраки триаголници со периметар 15, најди ги димензиите на триаголникот кој има најголема плоштина.
4. Производител на кутии сака да направи кутија во форма на паралелопипед со волумен 500 cm^3 . Да се најдат димензиите на паралелопипедот за кои цената на кутија ќе биде најмала.
5. Во елипсата $4x^2 + 9y^2 = 36$ впишан е рамнокрак триаголник со најголема плоштина така што основата на триаголникот е паралелна на поголемата оска на елипсата, а едно теме на триаголникот е теме и на елипсата. Да се најде плоштината на триаголникот.
6. Околу топка со радиус 6 cm опишан е конус со најмал волумен. Да се пресмета плоштината на конусот.
7. Функцијата на побарувачка на еден производ е $x = -\frac{1}{2}p + 100$, каде p е цената на производот, а функцијата на трошоци е $C(x) = x^2 + 20x + 147$. Да се определи максималната добивка (заработувачка)?
(Упатство: Функцијата на приход е производ од побарувачката и цената по единица производ)
8. Вкупните дневни трошоци и вкупните дневни приходи на една млекара се дадени со функциите $C(x) = 30x + 1000$ и $R(x) = -\frac{1}{500}x^2 + 50x$, соодветно. Да се определи дневното производство за кое се остварува максимална добивка. Колку изнесува максималната добивка?

14. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Определи го изводот на функцијата:

а) $y = x - 4$ во точката $x_0 = 5$, б) $y = x^2 + 3$ во точката $x_0 = 1$,

в) $y = (2x + 1)^2$ во точката $x_0 = 2$, г) $y = \frac{x^2 + 3}{x}$ во точката $x_0 = 1$.

2. Определи го изводот на функцијата, со примена на соодветната формула:

а) $y = 2x^4 + \frac{1}{x}$,

б) $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$,

в) $y = \sqrt[4]{x^3}$

г) $y = \frac{1}{x^4} + 2x^3$.

3. Определи го изводот на функција:

а) $y = 5x^2 - 4 \ln x$,

б) $y = \log_2 x + e^x + 3x^4$,

в) $y = 3^x + 5 \cdot e^x$,

г) $y = \frac{x}{1 - x^2}$,

д) $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

ѓ) $y = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.

4. Определи го изводот на функцијата:

а) $y = \ln x \cdot \cos x$,

б) $y = 2x^3 \ln x$,

в) $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$,

г) $y = \frac{\ln x}{x^3}$,

д) $y = \frac{\ln x}{1 + x^2}$,

ѓ) $y = (2x + 1)e^x$,

е) $y = (x^2 + 3x - 4)e^x$,

ж) $y = \frac{e^x}{x}$.

5. Определи го изводот на сложената функцијата:

а) $y = (5x + 7)^{12}$,

б) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$,

в) $y = e^{x^3 - 2x}$

г) $y = \ln x^5$,

д) $y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$,

ѓ) $y = \ln \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$,

е) $y = \ln \sqrt{\frac{2x}{1 - 2x}}$,

ж) $y = (2x + 1)^2 e^{2x}$,

з) $y = e^{\sqrt{x}} \ln 2x$,

с) $y = e^{x^2} x^3$.

6. Определи го изводот на функцијата:

а) $y = e^{x^2 + 3x + 4}$,

б) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3}$,

$$\text{в)} y = x^{1-x^2}$$

$$\text{г)} y = x^{\ln x}.$$

7. Определи го вториот изводот на функцијата:

$$\text{а)} y = (5x + 7)^{12},$$

$$\text{б)} y = \ln(x^2 + 2x),$$

$$\text{в)} y = 2x^2 - 3x^2 + 5,$$

$$\text{г)} y = \frac{1-x}{1+x}.$$

8. Определете ги интервалите на монотоност и екстремните вредности на функцијата:

$$\text{а)} y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2},$$

$$\text{б)} y = \frac{x}{1-x},$$

$$\text{в)} y = (x-1)e^x,$$

$$\text{г)} y = -x^2 + 6x - 7.$$

9. Определете ги интервалите на конвексност и конкавност на кривата и одредете ги превојните точки:

$$\text{а)} y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2},$$

$$\text{б)} y = \frac{x}{1-x},$$

$$\text{в)} y = (x-1)e^x,$$

$$\text{г)} y = -x^2 + 6x - 7.$$

10. Скицирај го графикот на функцијата:

$$\text{а)} y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad \text{б)} y = \frac{x^2}{2x-4}; \quad \text{в)} y = \frac{e^x}{x}; \quad \text{г)} y = \ln(x^2 + 1).$$

Модуларна единица 2 – Интегрално сметање (за економска струка)

1. Неопределен интеграл

Задачата на диференцијалното сметање е да се занимава со наоѓање изводи на дадена функција $y = f(x)$. Интегралното сметање решава проблем спротивен на проблемот за наоѓање на извод. Тој проблем е всушност одредување на функцијата чијшто извод е познат. Токму поради тоа, интегралното сметање се сфаќа како инверзна операција на диференцијалното сметање.

Дефиниција 1: Нека е дадена функција f дефинирана на интервалот (a, b) . Секоја диференцијабилна функција F дефинирана на интервалот (a, b) така што

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b),$$

се нарекува **примитивна функција** за функцијата f .

Пример 1 За функцијата $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, примитивна функција е

$$F(x) = \frac{x^4}{4}, x \in \mathbb{R}, \text{ бидејќи } F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Но ако ја разгледаме и функцијата $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 5$, $x \in \mathbb{R}$, тогаш и за неа важи

$$F'_1(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 5\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Оттука следува следната теорема:

Теорема 1: Нека $F(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$ на интервалот (a, b) . Тогаш и функцијата $F(x) + C$ каде $C \in \mathbb{R}$ е произволна константа, е исто така примитивна функција за функцијата $f(x)$.

Доказ: Тврдењето во теоремата следува од тоа што $F(x)$ и $F(x) + C$ имаат ист прв извод кој е еднаков на функцијата $f(x)$.

$$(F(x) + C)' = (F(x))' = f(x).$$

■

Теорема 2: Нека $F(x)$ и $G(x)$ се различни примитивни функции на функцијата $f(x)$ на интервалот (a, b) . Тогаш за функцијата $G(x)$ важи $G(x) = F(x) + C$ каде $C \in \mathbb{R}$.

Доказ: Ако $F(x)$ и $G(x)$ се различни примитивни функции на функцијата $f(x)$ на интервалот (a, b) , тогаш важи:

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Нека $H(x) = G(x) - F(x)$, од каде ќе следува дека

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

За $H'(x) = 0$ имаме дека $H(x) = C$,

па според тоа $C = G(x) - F(x)$, т.е. $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. ■

Операцијата на наоѓање на примитивна функција на дадена функција се нарекува **интегрирање**. Оваа операција е инверзна на диференцирањето односно на наоѓањето извод на функција.

Но, кај диференцирањето забележавме дека функцијата е еднозначно определена, што не е случај кај интегрирањето. Тоа го забележавме и од пример 1.

Од теорема 1 можеме да заклучиме дека секоја функција има бесконечно многу примитивни функции.

Исто така, од теорема 2 можеме да заклучиме дека наместо да се наоѓаат сите примитивни функции на дадена функција, доволно е да се најде само една, која било од нив. Ако се најде само една примитивна функција, сите останати се добиваат со додавање на константа C .

Множеството од сите примитивни функции на функцијата f , можеме да го означиме како: $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Дефиниција 2: Множеството од сите примитивни функции на дадена функција f се нарекува **неопределен интеграл**.

Неопределениот интеграл на функцијата f се означува со:

$$\int f(x) dx.$$

Според ова, можеме да запишеме дека $\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ или само накратко $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Во дефиниција 2, f се нарекува **интегранд** или **подинтегрална функција**, а $f(x)dx$ се нарекува **подинтегрален израз**.

Константата C пак во $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, се вика **интеграциона константа**.

Пример 2

Бидејќи $(a^x)' = a^x \ln a$, следува дека $\frac{a^x}{\ln a}$ е примитивна функција на $a^x, a > 0, a \neq 1$. Па можеме да запишеме дека $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$.

1

Најди ја примитивната функција на функцијата:

а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = x^n$.

Видовме дека дадена функција може да има бесконечно многу примитивни функции. Но, не секоја функција има примитивна. Можеме да нагласиме дека секоја непрекината функција има примитивна.

Ако за дадена функција f дефинирана на интервалот (a, b) постои примитивна функција, тогаш велиме дека функцијата f е **интеграбилна** на интервалот (a, b) .

Делот од математиката кој се занимава со одредувањето на примитивните функции, т.е. со пресметување на интегралите, како и нивната примена се нарекува **интегрално сметање**.

Ако сакаме геометриски да го објасниме поимот на неопределен интеграл, тогаш бидејќи го дефинираме како множество од примитивни функции, слободно можеме да кажеме дека неопределениот интеграл претставува множество од криви во рамнината, кои се графици на примитивните функции и се нарекуваат **интегрални криви**.

За да ја најдеме интегралната крива која што минува низ дадена точка $A(x_0, y_0)$, тогаш со замена на координатите на точката $A(x_0, y_0)$ во $y = F(x) + C$, ќе ја добиеме интеграционата константа, т.е.

$$y_0 = F(x_0) + C, \text{ од каде } C = y_0 - F(x_0).$$

Тогаш бараната интегрална крива која минува низ точката $A(x_0, y_0)$ ја има равенката $y = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Ќе ги разгледаме следните примери:

Пример 3 Ќе покажеме дека $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ е примитивна функција на функцијата

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ако пресметаме извод од функцијата $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, ќе добиеме:

$$(F(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Пример 4 Ќе ја најдеме онаа примитивна функција F на $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ чијшто

график минува низ точката $A(1,2)$.

Примитивна функција на функцијата $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ е $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, бидејќи:

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} \right)' = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Со замена на координатите на точката $A(1,2)$ во $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, добиваме

$$F(1) = \frac{1^4}{4} + 2\sqrt{1} = \frac{9}{4}.$$

Значи бараната интегрална крива која минува низ точката $A(1,2)$ ја има равенката

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0), \text{ т.е. } y = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}.$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди по една примитивна функција за функцијата:

а) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$; б) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. Покажи дека $F(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|$ е примитивна функција на функцијата

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

3. Провери дали е точно:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2 \ln^2 x} + C; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx.$$

4. Определи ја онаа примитивна функција F на f чијшто график минува низ точката $A(0, 2)$, ако:

$$\text{а) } f(x) = 3x^2; \quad \text{б) } f(x) = e^x.$$

2. Основни својства на неопределениот интеграл и таблица на основни интеграл

Од дефиницијата на неопределениот интеграл следуваат следните својства:

Теорема 1: Ако функцијата f е интегрибилна на интервалот (a, b) , тогаш важи:

1. Изводот на неопределениот интеграл е еднаков на подинтегралната функција, т.е. ако $\int f(x) dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, тогаш

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad x \in (a, b).$$

2. Диференцијалот на неопределениот интеграл е еднаков на подинтегралниот израз, т.е. ако $\int f(x) dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, тогаш

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx, \quad x \in (a, b).$$

3. Неопределениот интеграл од диференцијалот на примитивната функција $F(x)$ е еднаков на $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, т.е. важи:

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C, \quad x \in (a, b).$$

Доказ: 1. Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f на интервалот (a, b) , односно $\int f(x) dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Тогаш имаме: $\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$

2. Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f на интервалот (a, b) ,
односно $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Тогаш имаме: $d\left(\int f(x) dx\right) = d(F(x) + C) = F'(x) dx = f(x) dx, x \in (a, b)$.

3. Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f на интервалот (a, b) ,
односно $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Тогаш имаме: $\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b)$.

■

Теорема 1 покажува дека диференцирањето и интегрирањето се инверзни операции.

При пресметување на неопределениот интеграл, важат својствата дадени во следната теорема:

Теорема 2:

1. Ако функциите f и g се интегрибилни на интервалот (a, b) , тогаш и нивниот збир $f + g$ и нивната разлика $f - g$ се интегрибилни функции на интервалот (a, b) и важи:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx, x \in (a, b).$$

2. Ако функцијата f е интегрибилна на интервалот (a, b) и ако $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогаш и функцијата $k \cdot f$ е интегрибилна на интервалот (a, b) и важи:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx, x \in (a, b).$$

Доказ: 1. Во диференцијалното сметање важи дека: $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$. Ако ова равенство го интегрираме од двете страни, добиваме:

$$\int d(f(x) \pm g(x)) = \int (df(x) \pm dg(x)).$$

Со користење на 3. од теорема 1, добиваме:

$$\int (df(x) \pm dg(x)) = \int d(f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x) = \int df(x) \pm \int dg(x).$$

2. Бидејќи важи: $d\left(\int k \cdot f(x) dx\right) = kd\left(\int f(x) dx\right)$, а користејќи го 2. од теорема 1, добиваме: $d\left(\int k \cdot f(x) dx\right) = k \int f(x) dx$.

■

Својствата докажани во теорема 2 се познати и како **основни правила за интегрирање**.

Врз основа на дефиницијата на неопределен интеграл и таблицата на основни изводи, можеме да ја напишеме **таблицата на основни интеграли**.

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	

Со користење на основните својства на неопределениот интеграл и таблицата на основни интеграли, ќе решиме неколку примери:

Пример 1

Да ги решиме следниве неопределени интеграли:

$$\text{а) } \int x^6 dx; \quad \text{б) } \int (x^2 + 3x - 1) dx; \quad \text{в) } \int x^3 \sqrt{x} dx; \quad \text{г) } \int (2^x + 5^x)^2 dx.$$

а) Со користење на таблицата со основни интеграли, т.е. вториот основен интеграл, имаме:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

б) Со користење на таблицата со основни интеграли и правилото за интегрирање на збир и разлика на функции, имаме:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 1) dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int dx = \frac{x^3}{3} + C_1 + 3 \frac{x^2}{2} + 3C_2 - x - C_3 = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + (C_1 + 3C_2 - C_3) = \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

в) Најпрво ќе направиме трансформација на подинтегралната функција, а потоа ќе го искористиме вториот табличен интеграл:

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{1+\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{4}{2}} dx = \frac{x^{\frac{4}{2}+1}}{\frac{4}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} x^2 \sqrt{x} + C.$$

г) Ако ја презапишеме поинаку подинтегралната функција, ќе добиеме:

$$\begin{aligned}\int (2^x + 5^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \int (4^x + 2 \cdot 10^x + 25^x) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C\end{aligned}$$

Поради поедноставно пишување, нема да запишуваме повеќе константи во резултатот, туку директно на крај ќе запишеме само една константа.

1

Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int (1 + 2x + 4x^2) dx; \quad \text{б) } \int (1 - 3x) \cdot (x^2 + 1) dx; \quad \text{в) } \int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x - 4}{x} \right) dx.$$

Пример 2

Ќе ги решиме следните неопределени интеграли:

$$\text{а) } \int \left(x^4 - \sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

Со користење на таблицата на основни интегрални, како и на правилата за интегрирање, ќе имаме:

а)

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 - \sqrt{x} + x\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int \left(x^4 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{-2} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{x^3} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C = \\ &= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.\end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx = \\ &= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C.\end{aligned}$$

Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx; \quad \text{б) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$$

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги неопределените интеграли:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \left(x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}^x\right) dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x} dx; \quad \text{в) } \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx; \\ \text{г) } \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx; \quad \text{д) } \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right) dx; \quad \text{е) } \int (2+x^2)^3 dx. \end{aligned}$$

3. Метод на замена

За решавање на неопределени интеграли неопходно е да се применуваат одредени методи (техники на интегрирање). Наједноставните интеграли се решаваат преку примена на таблица и основни својства, која веќе ја разгледавме, но таа интеграција е невозможно да се примени во сите случаи. Еден од основните методи кои се користат за решавање на посложени неопределени интеграли е методот на замена на променливата со нова променлива или методот на супституција.

Овој метод се однесува на замена на променливата x со нова променлива t , која би го упростила почетниот интеграл сведувајќи го на табличен интеграл.

Методот на замена е даден во следната теорема:

Теорема 1: Нека f е интегрибилна функција на интервалот (a, b) и нека φ е диференцијабилна функција која интервалот (α, β) го пресликува во интервалот (a, b) . Тогаш важи

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \text{ за } x = \varphi(t).$$

Доказ: Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f . Тогаш според дефиницијата ќе важи $\int f(x)dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$. Ќе дефинираме функција $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Ако ја диференцираме функцијата Φ ќе добиеме $\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Оттука добиваме дека функцијата Φ е примитивна функција на функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тоа значи дека од дефиницијата на неопределениот интеграл ќе имаме:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Ако земеме предвид дека $x = \varphi(t)$, тогаш:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C. \quad \blacksquare$$

Со користење на методот на замена, дел од подинтегралната функција се заменува со нова променлива. Мораме да нагласиме дека не постои правило според кое се прави смената $x = \varphi(t)$. Исто така, диференцијалот на старата функција мора да се изрази преку диференцијалот на новата променлива. Целта е да се добијат еден или повеќе таблични интегрални кои лесно се решаваат. После решавањето на интегралот, потребно е да се вратиме на почетната променлива, користејќи ја замената.

Ќе го разгледаме следниот пример:

Пример 1

Да ги решиме неопределените интегрални:

$$\text{а) } \int (5-2x)^4 dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(x-2)^3}; \quad \text{в) } \int \frac{e^x}{x^2} dx; \quad \text{г) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

а) За решавање на овој интеграл можеме да ја искористиме биномната формула и да ја запишеме подинтегралната функција $(5-2x)^4$ во развиен облик, а потоа да решаваме со користење на таблични интегрални. Но, овој начин одзема повеќе време. Поради тоа ќе го искористиме методот на замена.

Воведуваме смена $t = 5-2x$, од каде $dt = -2dx$ или ако го изразиме диференцијалот на функцијата со диференцијалот на новата променлива ќе имаме: $dx = -\frac{dt}{2}$.

$$\text{Оттука, } \int (5-2x)^4 dx = \int t^4 \left(\frac{-dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^4 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{(5-2x)^5}{10} + C.$$

б) Сосема слично на решениот неопределен интеграл под а) ја користиме смената $t = x - 2$, $dt = dx$.

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C.$$

в) Во овој пример слично на претходните два примери, ја користиме смената $\frac{1}{x} = t$,

$$-\frac{1}{x^2} dx = dt, \text{ од каде добиваме: } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

г) Со користење на смената $\ln x = t$, од каде $\frac{1}{x} dx = dt$, добиваме:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$



1 Реши ги неопределените интеграл:

а) $\int \frac{dx}{5x+4}$; б) $\int \sqrt[5]{(4-7x)^3} dx$; в) $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx$.

Пример 2

Да ги решиме неопределените интеграл:

а) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$; б) $\int \frac{dx}{\frac{x}{e^2} + e^x}$.

а) При решавање на интегралот ја користиме смената $\ln \frac{1+x}{1-x} = t$, од каде $\frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} dt$, со што добиваме:

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

б) За решавање на овој интеграл ќе користиме два смени:

- со првата смена $e^{\frac{x}{2}} = t$, $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = dt$, $dx = \frac{2}{t} dt$, $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = t^2$ интегралот се трансформира во:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t(t+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = \\
&= 2 \int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int \left(\frac{1+t}{t^2(1+t)} - \frac{t}{t^2(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t-t}{t(1+t)} \right) dt = \\
&= 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t}{t(1+t)} + \frac{t}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int \frac{1}{(1+t)} dt = (*),
\end{aligned}$$

понатаму со користење на смената $s = t + 1$, $ds = dt$ за интегралот $\int \frac{1}{(1+t)} dt$, добиваме:

$$(*) = 2 \left(\frac{t^{-1}}{-1} - \ln|t| + \ln|s| \right) + C = (**),$$

од каде враќајќи се наназад во воведените смени, добиваме:

$$(**) = 2 \left(-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} - \ln \left| e^{\frac{x}{2}} \right| + \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| \right) + C = -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C.$$

Забелешка: Понекогаш е потребно неколку пати да се воведува замена со нова променлива, за да интегралот се сведе на табличен.

Пример 3

Да го решиме неопределениот интеграл $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$.

Прво ја користиме смената $\ln x = t$, од каде $\frac{1}{x} dx = dt$, а потоа уште еднаш воведуваме смена $\ln t = u$, од каде $\frac{1}{t} dt = du$.

Со тоа за интегралот имаме:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx &= \int \frac{1}{t \ln t} dt = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\ln|t|| + C = \\
&= \ln|\ln|\ln|x|| + C.
\end{aligned}$$

Пример 4

Граничните трошоци за производство на еден производ се дадени со функцијата $C_g(Q) = \frac{e^Q}{e^Q + 3}$, каде Q е нивото на производство. Ако компанијата произведува 2 единици, вкупните трошоци се 2 парични единици. Ќе ги определиме вкупните и фиксните трошоци.

Ако функцијата на вкупни трошоци е дадена со $C(x)$, каде x е бројот на произведени единици, тогаш граничните трошоци се пресметуваат како извод од вкупните трошоци $C_g(x) = C'(x)$.

Значи, за да ги одредиме вкупните трошоци од граничните трошоци, ќе имаме:

$$C(Q) = \int C_g(Q) dQ = \int \frac{e^Q}{e^Q + 3} dQ.$$

Интегралот ќе го решиме со користење на метод на замена:

$$t = e^Q + 3 \Leftrightarrow dt = e^Q dQ \Leftrightarrow dQ = \frac{dt}{e^Q}, \text{ од каде:}$$

$$C(Q) = \int C_g(Q) dQ = \int \frac{e^Q}{e^Q + 3} dQ = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^Q + 3| + C.$$

Од тоа што кога компанијата произведува 2 единици, вкупните трошоци се 2 парични единици, ќе ја најдеме вредноста на константата C .

$$C(2) = 2, \text{ т.е. } 2 = \ln|e^2 + 3| + C \Rightarrow C = 2 - \ln|e^2 + 3| \approx -0,341.$$

Значи функцијата на вкупни трошоци е дадена со:

$$C(Q) = \ln|e^Q + 3| - 0,341.$$

Фиксните трошоци се трошоците кои компанијата ги има на почетокот и не се поврзани со нивото на производство:

$$C(0) = \ln|e^0 + 3| - 0,341 \approx 1,046.$$



Функцијата на граничниот приход е дадена со $R_g(p) = e^{2p+1}$, каде p е цената на еден производ. Определи ја функцијата на вкупен приход.

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги неопределените интеграл:

$$\text{а) } \int x(x^2 - 13)^{23} dx; \quad \text{б) } \int (3x^2 - 2x + 1)(x^3 - x^2 + x - 9)^7 dx; \quad \text{в) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 3x - 10}.$$

2. Реши ги неопределените интеграл:

$$\text{а) } \int (x^2 - 3)\sqrt[5]{x^3 - 9x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}; \quad \text{в) } \int \frac{x^2}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

3. Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{1}{x \ln^5 x} dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

4. Граничните трошоци за производство на еден производ се дадени со функцијата

$C_g(Q) = \frac{e^Q}{e^Q + 2}$, каде Q е нивото на производство. Ако компанијата произведува 4 единици, вкупните трошоци се 3 парични единици. Определи ги вкупните и фиксните трошоци.

4. Метод на парцијална интеграција

Методот на замена на променливата не е доволен за да се пресметуваат неопределени интеграли на поширока класа од функции. Честопати подинтегралната функција е запишана во облик на производ на функција и диференцијал на друга функција, но притоа не може да се воведо замена на променливата за да се сведе интегралот на табличен.

Поради тоа пристапуваме кон друг метод за решавање на неопределени интеграли, а тоа е **методот на парцијална интеграција** или методот на **интеграција по делови**.

Формулата за парцијална интеграција е дадена во следната теорема:

Теорема 1: Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни функции на интервалот (a, b) , тогаш важи формулата за парцијална интеграција

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Доказ: Нека $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е примитивна функција на функцијата $u(x)v'(x)$ на интервалот (a, b) . Од дефиницијата на примитивна функција следува дека F е непрекината функција и за неа важи $F'(x) = u(x)v'(x)$, $x \in (a, b) \setminus A$, каде $A \subset (a, b)$ е дискретно подмножество. Поради диференцијабилноста на функциите $u(x)$ и $v(x)$ следува дека и функцијата $u(x)v(x)$ е непрекината на интервалот (a, b) .

Оттука следува дека и функцијата $G(x) = u(x)v(x) - F(x)$ е непрекината на интервалот (a, b) . Ако ја диференцираме, добиваме:

$$G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x).$$

Следува дека функцијата $G(x)$ е примитивна функција на функцијата $u'(x)v(x)$ на интервалот (a, b) и притоа важи:

$$F(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Оттука се добива формулата $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$. ■

Формулата за парцијална интеграција можеме да ја запишеме и во обликот:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Изборот за функциите $u(x)$ и $v(x)$ не се врши според определени правила, туку интуитивно.

Ако изборот за функциите $u(x)$ и $v(x)$ е погрешен, наместо да го упрости интегралот, ќе го прави посложен за решавање во однос на почетниот.

Пример 1

Да ги решиме неопределените интегрални:

а) $\int xe^{-x} dx$; б) $\int \ln x dx$.

а) За решавање на интегралот ќе искористиме парцијална интеграција на следниов начин:

Како u ќе го одбереме $u = x$. Со пресметување на прв извод, т.е. диференцирање добиваме $du = dx$. Остатокот од подинтегралниот израз е dv , значи $dv = e^{-x} dx$. Оттука со интегрирање добиваме $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$.

Со замена во формулата за парцијална интеграција ќе имаме:

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C.$$

б) За решавање на интегралот ќе искористиме парцијална интеграција на следниов начин:

Како u ќе го одбереме $u = \ln x$. Со пресметување на прв извод, т.е. диференцирање добиваме $du = \frac{1}{x} dx$. Остатокот од подинтегралниот израз е dv , значи $dv = dx$. Оттука со

интегрирање добиваме $v = \int dx = x$.

Со замена во формулата за парцијална интеграција ќе имаме:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

1 Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x^2 e^x dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$; в) $\int \frac{x}{e^x} dx$.

Пример 2 Да ги решиме неопределените интеграли:

а) $\int e^{x+\ln x} dx$; б) $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx$.

И двата интеграла ќе ги решиме со користење на методот на парцијална интеграција:

а) Ако $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$ со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме:

$$\int e^{x+\ln x} dx = \int e^x e^{\ln x} dx = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

б) Ако во почетниот интеграл најпрво го користиме методот на замена. Со смената $x+1=t \Rightarrow dx=dt$, добиваме: $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx = \int ((t-1)^2 + t - 1) \ln t dt = \int (t^2 - t) \ln t dt$.

Понатаму со користење на методот на парцијална интеграција, за $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$,

$$dv = (t^2 - t) dt \Rightarrow v = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}, \text{ добиваме:}$$

$$\begin{aligned} \int (t^2 - t) \ln t dt &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \int \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt + \frac{1}{2} \int t dt = \frac{2t^3 - 3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{9} t^3 + \frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2(x+1) - 3)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2x-1)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + C. \end{aligned}$$

2 Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x \ln(x^2 - 1) dx$; б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x^2 e^{-x} dx$; б) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x \ln^2 x dx$; б) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

3. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int \frac{x}{e^x} dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$.

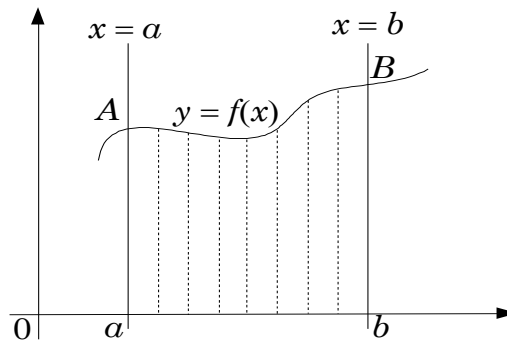
4. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int \ln x dx$; б) $\int x \ln(x-1) dx$.

5. Поим за определен интеграл

Поимот определен интеграл е фундаментален поим во математиката и останатите технички науки. Прво да видиме кој проблем и која идеја довеле до поимот интеграл. Треба да нагласиме дека методот за пресметување интеграли постои многу пред методите за дифференцијално пресметување. Познато е дека античкиот математичар Архимед во 3 век пр. н. е. го користел методот за пресметување на интегралите. Нему му било познато дека параболата ја дели површината на правоаголникот чии две темиња се на параболата а другите две темиња лежат на x -оската, на две површини кои се однесуваат 2 : 1. Суштински до поимот на интеграл, довел проблемот за одредување на плоштина на криволиниски трапез. Прво ќе ја претставиме идејата, односно методот до кој дошле независно еден од друг големиот германски математичар Лајбниц и англискиот математичар Њутн кои живееле во втората половина на XVII и првата половина на XVIII век. Дефиницијата која ќе ја дадеме ја дал германскиот математичар Риман во XIX век, а ознаката што ќе ја користиме ја вовел францускиот математичар Фурие во XIX век.

Под криволиниски трапез го подразбираме делот од рамнината кој се наоѓа помеѓу x -оската, графикот на дадена ненегативна функција $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ правите $x = a$ и $x = b$ кои се паралелни со y -оската. Наша задача е да ја одредиме плоштината на криволинискиот трапез (слика 1). Идејата е да го поделиме интервалот $[a, b]$ на повеќе подинтервали, со што површината на криволинискиот трапез ќе ја поделиме на правоаголници, со кои приближно ќе ја пресметаме плоштината на криволинискиот трапез.

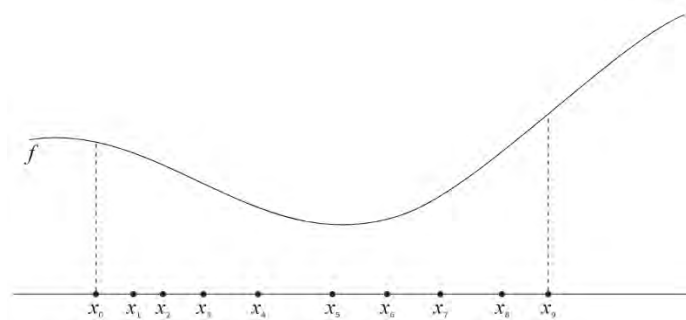


Слика 1

Дефиниција 1: Под поделба на сегмент $[a, b]$ подразбираме конечно множество од точки $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ така што:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

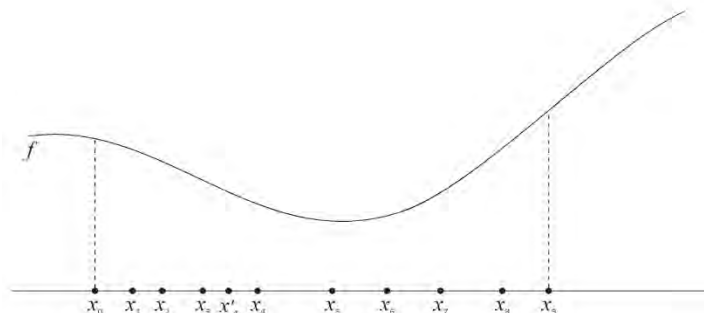
Значи овој сегмент $[a, b]$ го делиме на конечен број сегменти. Да ги разгледаме точките $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 = b$, (слика 2)



Слика 2

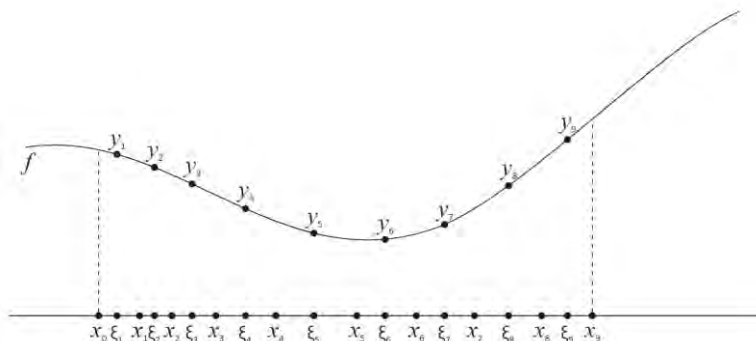
Со $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ ја означуваме должината на i -от сегмент. Значи ова се должините на сите сегменти. И го воведуваме поимот дијаметар на поделба што е еднаков на најголемата должина на некој потсегмент т.е. $d(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_{x_i}$.

Следно, ќе кажеме дека една поделба на сегмент P_1 е пофина од поделбата P_2 ако важи $P_2 \subset P_1$, т.е. поделбата P_1 содржи поголем број точки, од поделбата P_2 . Ова значи дека ако воведеме уште некоја точка на пример нека тоа биде точката x'_4 помеѓу точките x_3 и x_4 тогаш новата поделба ќе биде пофина од претходната поделба. (слика 3).



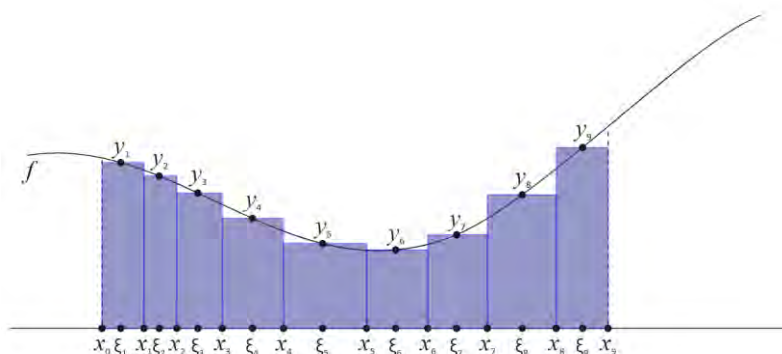
Слика 3

Значи поделбата е пофина доколку содржи повеќе точки од некоја друга поделба. Сега во секој од овие сегменти ќе избереме по една точка: $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Во нашиот пример тоа се точките $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_9$ (слика 4). Во овие точки ќе ја пресметаме вредноста на функцијата $y_i = f(\xi_i)$. Бидејќи функцијата f е непрекината во секоја точка од интервалот $[a, b]$, постои $f(\xi_i)$. Значи $y_1 = f(\xi_1), \dots, y_9 = f(\xi_9)$ и ќе ги означиме овие вредности на графикот на функцијата (слика 4).



Слика 4

Сега за секој сегмент ќе конструираме правоаголник со страни ξ_i и $f(\xi_i)$. Во нашиот пример ќе конструираме девет вакви правоаголници (слика 5).



Слика 5

Имаме дека должината на правоаголникот е еднаква на должината на соодветниот сегмент, а ширината на правоаголникот е еднаква на вредноста на функцијата во точките ξ_i . Правоаголниците да ги означиме со Π_i . Јасно е дека плоштината на секој правоаголник ќе биде еднаква на:

$$P(\Pi_i) = f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

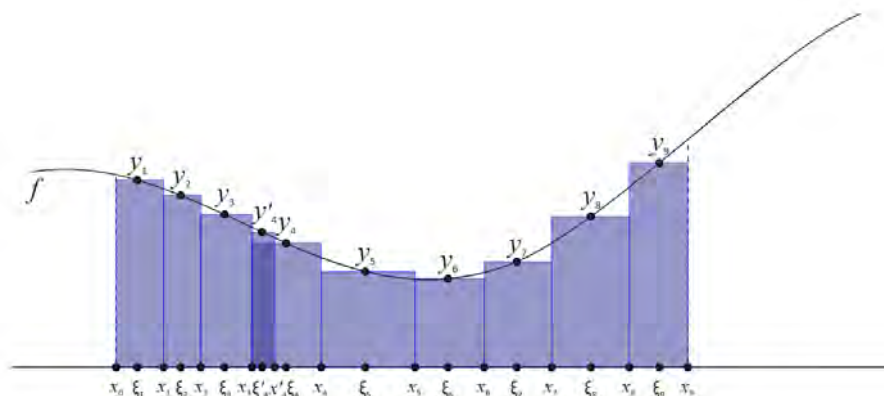
Збирот од плоштината на сите овие правоаголници може да се запише на следниот начин:

$$P(S) = f(\xi_1) \Delta_{x_1} + f(\xi_2) \Delta_{x_2} + \dots + f(\xi_9) \Delta_{x_9}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^9 f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

Јасно е дека оваа плоштина зависи од изборот на точките ξ_i . Ако поместиме некоја од точките ξ_i тогаш ќе се промени и плоштината на соодветниот правоаголник. Но она што можеме да го тврдиме е дека плоштината на овој криволиниски трапез е приближно еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците.

Да видиме што ќе се случи ако пак ја додадеме точката x'_4 и на интервалот од x_3 до x'_4 избереме точка ξ'_4 и во оваа точка ќе ја одредиме и вредноста на функцијата y'_4 . Сега за сегментот од x_3 до x'_4 ќе конструираме правоаголник. Наместо правоаголникот на сегментот x_3 до x_4 ќе имаме два правоаголника од x_3 до x'_4 и од x'_4 до x_4 . (слика 6)



Слика 6

Да видиме што може да заклучиме ако во постоечката поделба вметнеме уште една точка. Најправо можеме да забележиме дека збирот од плоштините на сите овие правоаголници има поблиска (поточна) вредност со вредноста на плоштината на криволинискиот трапез. Друго што може да се заклучи е дека дијаметарот на новата поделба (пофината поделба) е помал или еднаков на дијаметарот на претходната поделба. Со други зборови колку повеќе точки вметнуваме во поделбата максималната должина на сегментите е сè помала и помала, но плоштината од сите правоаголници е сè поблиска до плоштината на

криволинискиот трапез. Интуитивно сега е јасно, дека колку што дијаметарот на поделбата е помал, т.е. ако дијаметарот на поделбата тежи кон нула тогаш збирот од плоштината на овие правоаголници ќе се приближи произволно блиску до плоштината на криволинискиот трапез. Тоа не води до следната дефиниција.

Дефиниција 2: Нека е дадена функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, нека P е произволна поделба на сегментот $[a, b]$ и нека ξ_i се произволно избрани точки, по една од секој подсегмент. Сумата

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

се нарекува **Риманова интегрална сума** за функцијата f за дадена поделба P и избор на точки ξ_i .

Дефиниција 3: Функцијата $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е интеграбилна во Риманова смисла, на сегментот $[a, b]$ ако постои реален број I така што важи:

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I$$

односно ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P)(\forall \xi_i)(d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f) - I| < \varepsilon)$$

Бројот I го означуваме со

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

и означува **определен интеграл** од функцијата $f(x)$ од граница a до граница b .

Границата a ја нарекуваме **долна граница на интегралот**, додека граница b **горна граница на интегралот**. Функцијата $f(x)$ се нарекува **подинтегрална функција**, додека dx е диференцијал на непознатата x , односно ја означува должината на потсегментите во поделбата P .

Определениот интеграл всушност служи за пресметување на плоштина на криволиниски трапез, но има и други примени во техниката и инженерството. Многу е важно да знаеме дека интеграл всушност е збир од бесконечно многу собироци. Оттука и ознаката за интеграл е „издолжено S “ што всушност означува сума. Да заклучиме, определен интеграл е гранична вредност на сума од бесконечно многу собироци.

Во продолжение ќе наведеме теорема без да ја докажуваме, која се однесува на својствата на интегрибилните функции и определените интеграли:

Теорема 1: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се интегрибилни функции на интервалот $[a, b]$ и нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогаш функцијата $\alpha f(x) + \beta g(x)$ е интегрибилна на интервалот $[a, b]$ и важат следните својства:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$(3) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Последната теорема се докажува едноставно со директна примена на дефиницијата за определен интеграл.

Пример 1 → Да го пресметаме интегралот $\int_0^1 dx$.

Функцијата $f(x) = 1$ е непрекината на интервалот $[0, 1]$, од каде следува дека $\int_0^1 dx$ постои.

За да го пресметаме интегралот можеме да ја избереме следнава поделба:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Должината на секој од сегментите е $\frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Точките ξ_i ги

избираме да бидат еднакви на вредноста на десната граница на сегментите, на пример за

i -от сегмент $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right]$ бираме $\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$. За соодветните суми σ добиваме:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Бидејќи $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = 1$, можеме да заклучиме дека $\int_0^1 dx = 1$.

Пример 2

Да го пресметаме интегралот $\int_0^1 x dx$.

Функцијата $f(x) = x$ е непрекината на интервалот $[0, 1]$, од каде следува дека $\int_0^1 x dx$ постои.

За да го пресметаме интегралот можеме да ја избереме следнава поделба:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Должината на секој од сегментите е $\frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Точките ξ_i ги

избираме да бидат еднакви на вредноста на десната граница на сегментите, на пример за

i -от сегмент $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ бираме $\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$. За соодветните суми σ добиваме:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

$$\text{Бидејќи: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

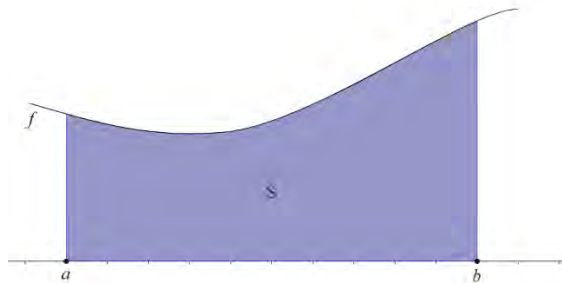
$$\text{Од каде можеме да заклучиме дека } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Пресметувањето на определениот интеграл по дефиниција може да биде комплицирано. Во следната лекција ќе биде дадена Њутн-Лајбницова формула што го олеснува пресметувањето на определениот интеграл.

6. Основна теорема на интегралното сметање

Овде ќе ја разгледаме основната теорема на интегрално сметање позната и како Њутн-Лајбницова формула. Ќе ги разгледаме и својствата на определениот интеграл.

Кога го дефинираме определениот интеграл претпоставивме дека е дадена функција $f(x)$ која е непрекината и ненегативна на интервалот $[a, b]$. Исто така кажавме дека под определен интеграл ја подразбираме плоштината на криволинискиот трапез, кој е одреден со графикот на функцијата $f(x)$, x -оската и правите $x=a$ и $x=b$ (слика 7).



Слика 7

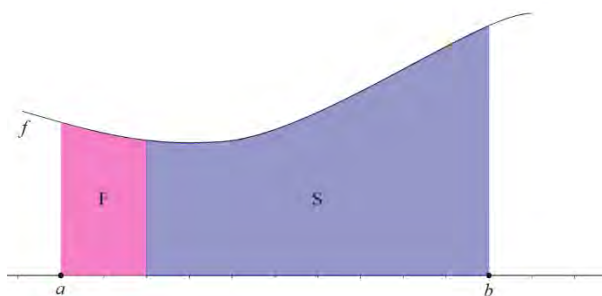
По дефиниција интегралот претставува сума од бесконечно многу мали плоштини на правоаголници:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Нека за $x \in [a, b]$, ја дефинираме функцијата $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. За оваа функција важи дека е непрекината на интервалот $[a, b]$ и е примитивна функција на функцијата $f(x)$ на интервалот $[a, b]$. Тоа значи дека функцијата $F(x)$ може да биде дефинирана и како

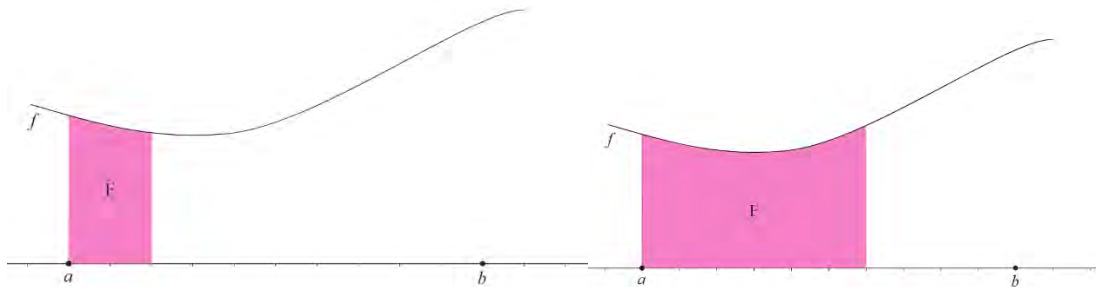
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \text{ каде } C \text{ е произволна константа.}$$

Последното равенство значи дека определениот интеграл со граници од a до x од функцијата $f(t)$ (оваа функција е иста со $f(x)$ само со друга ознака на променливата) е функција која ја мери плоштината на овој криволиински трапез кога $x \in [a, b]$ (слика 8).



Слика 8

Со F е определена плоштината на дел од криволиинскиот трапез кога $x \in [a, b]$. Јасно се гледа дека доколку x го зголемуваме ќе се зголемува и плоштината F , ако x го намалуваме ќе се намалува и плоштината F (слика 9).

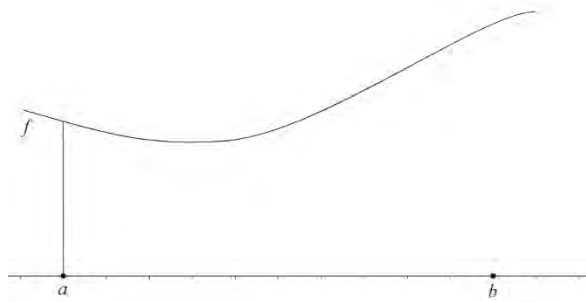


Слика 9

Од овде можеме да заклучиме дека функцијата $F(x)$ е растечка. Останува да ја одредиме вредноста на константата C . За таа цел ќе ставиме $x=a$ и добиваме:

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C.$$

Јасно е дека ќе интегралот $\int_a^a f(t) dt$ ќе биде еднаков на 0, бидејќи наместо криволиниски трапез ќе имаме отсечка (слика 10).



Слика 10

Од друга страна ако ставиме дека $x=b$, добиваме дека:

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + C = S + C,$$

што значи дека плоштината F ќе биде еднаква на плоштината на целиот криволиниски трапез S (слика 7). Ако замениме дека $C = F(a)$ добиваме:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Последната формула е позната како **Њутн-Лајбницова формула**. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 1: (Њутн-Лајбницова теорема) Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a, b]$ и ако F е која било нејзина примитивна функција, тогаш важи равенството:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Оваа теорема се нарекува **основна теорема на интегрално сметање**, а равенството (1) **основно правило на интегрално сметање** или **Њутн-Лајбницова формула**.

Њутн-Лајбницовата формула ја дава врската помеѓу неопределен и определен интеграл и со ова во голема мера се олеснува пресметувањето на определениот интеграл. За да го пресметаме определениот интеграл на функцијата f на интервалот $[a, b]$ доволно е да најдеме една нејзина примитивна функција F и да го пресметаме нејзиното нараснување на сегментот $[a, b]$. Значи пресметувањето на определен интеграл го сведуваме на наоѓање на некоја примитивна функција што е еквивалентно со пресметувањето на неопределениот интеграл.

Пример 1

Да пресметаме $\int_a^b x^n dx, n \in \mathbb{R}, 0 \notin [a, b]$.

Ќе разгледаме два случаи:

Кога $n \neq -1$, во овој случај $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, функцијата $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ е примитивна функција за

функцијата x^n па добиваме:

$$\int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

За $n = -1$, добиваме $\int_a^b \frac{dx}{x}$, бидејќи $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ за $x > 0$ добиваме:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

1

Пресметај го определениот интеграл $\int_1^2 x^3 dx$.

Пример 2

Да ги решиме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 (3-2x)dx \quad \text{б) } \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx .$$

За решавање на определените интеграли ќе ја искористиме Њутн-Лајбницовата формула.

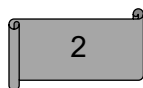
$$\text{а) } \int_0^2 (3-2x)dx = \left(3x - \frac{2x^2}{2}\right) \Big|_0^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2}\right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{2 \cdot 0^2}{2}\right) = 6 - 4 = 2 .$$

б) Со решавање на соодветниот неопределен интеграл добиваме:

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx = \ln|x| + e^x + C .$$

Оттука за определените интеграл ќе имаме:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x\right)dx = \left(\ln|x| + e^x\right) \Big|_1^3 = \ln 3 + e^3 - e .$$



Реши ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x}\right)dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x^2 (x^3 + 1)dx .$$

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 xdx,$$

$$\text{б) } \int_1^3 x^2 dx,$$

$$\text{в) } \int_0^1 e^x dx,$$

$$\text{г) } \int_0^1 \sqrt{x} dx,$$

$$\text{д) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\text{е) } \int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx.$$

2. Реши ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{x^4 + x^{-2} + 2}{x^3} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 (x-3)^3 dx;$$

$$\text{в) } \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - 3\right) dx;$$

$$\text{г) } \int_1^4 (e^x + \sqrt{x}) dx .$$

3. Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 x^7 dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx .$$

7. Интеграција со смена кај определен интеграл

Според Њутн-Лајбницова формула пресметувањето на определен интеграл го сведуваме на наоѓање на некоја примитивна функција што е еквивалентно со пресметување на неопределен интеграл. Кај неопределен интеграл веќе го разгледавме методот на интеграција со смена, кој се сведува на формулата:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Овде ја воведовме смената $x = \varphi(t)$.

Пример 1

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 (x+2)^3 dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx.$$

а) Ја воведуваме смената $t = x+2$ од каде $dx = dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = -1 \Rightarrow t = -1+2 = 1$ и кога $x = 1 \Rightarrow t = 1+2 = 3$. Со воведената смена и пресметаните нови граници за новововедената променлива, интегралот го решаваме како:

$$\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx = \int_1^3 t^3 dt = \left. \frac{1}{4} t^4 \right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20.$$

б) Ја воведуваме смената $x+1 = t$, $dx = dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = -2 \Rightarrow t = -2+1 = -1$ и кога $x = 0 \Rightarrow t = 0+1 = 1$. Оттука добиваме:

$$\int_{-2}^0 e^{x+1} dx = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e}.$$

1

Пресметај го определениот интеграл:

$$\text{а) } \int_2^3 (2x-1)^3 dx; \quad \text{б) } \int_1^2 e^{2x+1} dx.$$

Пример 2

Да ги пресметаме определените интеграли:

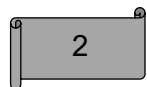
$$\text{а) } \int_4^5 \frac{dx}{x-3}; \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}.$$

а) Ја воведуваме смената $t = x - 3$, $dx = dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = 4 \Rightarrow t = 4 - 3 = 1$ и кога $x = 5 \Rightarrow t = 5 - 3 = 2$. Оттука добиваме:

$$\int_4^5 \frac{1}{x-3} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

б) Ја воведуваме смената $t = 2x + 1$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ и кога $x = 2 \Rightarrow t = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Оттука добиваме:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$



Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^3}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{(4x-3)^2}.$$

Пример 3

Да ги пресметаме определените интеграли:

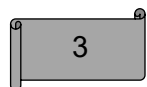
$$\text{а) } \int_0^3 \sqrt{1+x} dx; \quad \text{б) } \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$$

а) Ја воведуваме смената $\sqrt{1+x} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определениот интеграл. Новите граници се $x = 0, t = 1$ и $x = 3, t = 2$. И добиваме:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} dx = 2 \int_1^2 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8 - 1) = \frac{14}{3}.$$

б) Ја воведуваме смената $t = \sqrt[3]{1-x}$, $t^3 = 1-x$, $dx = -3t^2 dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определениот интеграл. Новите граници се $x=1, t=0$ и $x=9, t=-2$. И добиваме:

$$\begin{aligned} \int_0^9 x \sqrt[3]{1-x} dx &= \int_0^{-2} (1-t^3) t (-3t^2) dt = \int_0^{-2} (3t^6 - 3t^3) dt = \left(\frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{4} \right) \Big|_0^{-2} = \frac{3(-2)^7}{7} - \frac{3(-2)^4}{4} \\ &= 3 \cdot 16 \left(-\frac{8}{7} - \frac{1}{4} \right) = \frac{48 \cdot (-39)}{28} = 66,85. \end{aligned}$$



Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_0^1 \sqrt[3]{2x+1} dx$; б) $\int_2^4 \sqrt{2x-3} dx$; в) $\int_0^1 x \sqrt[5]{x+2} dx$.



Пример 4 Да ги пресметаме определените интеграли:

а) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$; б) $\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx$.

а) Ја воведуваме смената $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$. Исто така треба да ги смениме и границите на определениот интеграл. Новите граници се $x=0, t=1$ и $x=1, t=2$. И добиваме:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

б) Ја воведуваме смената $x^2 - 5x + 6 = t$, $(2x-5) dx = dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определениот интеграл. Новите граници се $x=-1, t=12$ и $x=0, t=6$. И добиваме:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = \int_{12}^6 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{12}^6 = \ln 6 - \ln 12 = \ln \left(\frac{6}{12} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$



Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx$; б) $\int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx$.

Пример 5

Да ги пресметаме определените интеграли:

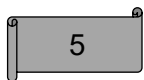
$$\text{а) } \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx.$$

а) Ја воведуваме смената $x-1=t^2$, $dx=2t dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определените интеграл. Новите граници се $x=1, t=0$ и $x=2, t=1$. И добиваме:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot (t+1)}{(t+1)^2} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

б) Ја воведуваме смената $t^6=e^x+3$, $6t^5 dt=e^x dx$. Исто така треба да ги смениме и границите на определените интеграл. Новите граници се $x=0, t=\sqrt[6]{4}$ и $x=\ln 2, t=\sqrt[6]{5}$. И добиваме:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx = 6 \int_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} t^6 dt = \frac{6}{7} e^7 \Big|_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} = \frac{6}{7} (5\sqrt[6]{5} - 4\sqrt[6]{4}).$$



Пресметај го определените интеграл $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+2} dx.$

Во продолжение ќе дадеме некои својства кои може да ги користиме за полесно решавање на определените интеграли.

1) Нека функцијата $f(x)$ е непарна функција, т.е. $f(-x)=-f(x)$, да го пресметаме сега интегралот:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Ќе го разгледаме прво интегралот $\int_{-a}^0 f(x) dx$. Ја воведуваме смената $t=-x$, $dt=-dx$, па мора да ги смениме и границите на интегралот $x=-a, t=a$ и $x=0, t=0$. Добиваме

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{непарна функција}}{=} \int_a^0 -f(t)(-dt) = \int_a^0 f(t) dt \underset{\text{со менување на границите}}{=} - \int_0^a f(x) dx$$

и ако замениме во првиот интеграл добиваме:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Од овде можеме да заклучиме дека доколку подинтегралната функција е непарна, а интервалот на интеграција симетричен во однос на нулата, вредноста на интегралот е еднаква на нула.

Пример 6 Да докажеме дека $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.

Функцијата $f(x) = x^3$ е непарна функција бидејќи $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Бидејќи интервалот на интеграција е симетричен во однос на нулата, вредноста на интегралот е нула. За овој интеграл лесно се проверува дека е еднаков на нула:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

2) Да разгледаме сега и друго својство кое исто така ќе ни помогне во решавање на определените интеграли. Нека $f(x)$ е парна функција, т.е. $f(-x) = f(x)$, да го пресметаме сега интегралот:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

Прво ќе го разгледаме интегралот $\int_{-a}^0 f(x)dx$. Со воведување на смената $t = -x$, $dt = -dx$, потребно е да ги смениме и границите на интегралот $x = -a, t = a$ и $x = 0, t = 0$, добиваме

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{парна функција}}{=} \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_a^0 -f(x)dx \underset{\text{со менување на границите}}{=} \int_0^a f(x)dx.$$

Ако замениме во првиот интеграл добиваме:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Последната формула геометриски можеме да ја интерпретираме на следниот начин: доколку функцијата е парна нејзиниот график е симетричен во однос на y -оската, па затоа плоштината на фигурата помеѓу правите $x = -a$ и $x = 0$ е еднаква на плоштината на фигурата помеѓу правите $x = 0$ и $x = a$ од каде следува горната формула.

Пример 7

Да докажеме дека $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$.

Функцијата $f(x) = x^2$ е парна функција бидејќи $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Бидејќи интервалот на интеграција е симетричен во однос на нулата, за вредноста на интегралот

имаме: $\int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

6

Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_{-2}^2 \frac{x^5}{2} dx$; б) $\int_{-3}^3 2x^4 dx$.

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги следниве определени интеграли:

а) $\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx,$	б) $\int_0^1 (3x+1)^2 dx,$	в) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+2)^2},$
г) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3},$	д) $\int_1^4 \sqrt{x} dx,$	ѓ) $\int_2^{10} \sqrt{2x+5} dx,$
е) $\int_0^1 \sqrt[5]{(5x+1)^2} dx,$	ж) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx,$	з) $\int_{-1}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx,$
с) $\int_1^2 \frac{x}{9-x^2} dx,$	и) $\int_0^1 e^{2x+1} dx,$	ј) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x+2}}{\sqrt[3]{e^x+2}} dx.$

2. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_{-1}^1 x^7 dx$; б) $\int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx.$

8. Парцијална интеграција на определен интеграл

Пресметувањето на определен интеграл го сведуваме на наоѓање на некоја примитивна функција што е еквивалентно со наоѓање на неопределен интеграл. Парцијалната интеграција најчесто се користи кога подинтегралната функција е логаритамска, експоненцијална или тригонометриска. Кај неопределен интеграл веќе го разгледавме методот на парцијална интеграција:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Оваа формула се прилагодува за определен интеграл и го добива обликот:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Пример 1

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 x e^x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx.$$

а) Со користење на парцијална интеграција $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, добиваме:

$$\int_0^2 x e^x dx = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (2e^2 - 0e^0) - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.$$

б) Со користење на парцијална интеграција $u = x^2 - 5 \Rightarrow du = 2x dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$, добиваме:

$$\int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (x^2 - 5) e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{-2x} dx = \frac{2}{e^2} - \frac{5}{2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx.$$

За да го решиме интегралот $\int_0^1 x e^{-2x} dx$, повторно треба да примениме парцијална

интеграција, при што $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \\ &= -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ако ова го замениме во првиот интеграл ќе добиеме:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx = \\ &= \frac{2}{e^2} - \frac{5}{2} - \frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} \\ &= -\frac{9}{4} + \frac{5}{4e^2}\end{aligned}$$

в) Со користење на парцијална интеграција $u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = (2x + 3)dx$,

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$. Добиваме:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = (x^2 + 3x - 1)e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx.$$

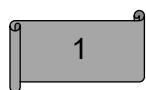
За да го решиме интегралот $\int_0^1 (2x + 3)e^x dx$, повторно треба да примениме парцијална

интеграција, при што $u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

$$\int_0^1 (2x + 3)e^x dx = (2x + 3)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1,$$

ако ова го замениме во првиот интеграл ќе добиеме:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3)e^x dx = 3e + 1 - (3e - 1) = 2.$$



Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 x e^{-x} dx; \quad \text{б) } \int_1^2 (x^2 + 2x + 1)e^x dx.$$

Пример 2

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; \quad \text{б) } \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx; \quad \text{в) } \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$$

а) Ако го примениме правилото за парцијална интеграција имаме: $u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx$,

$dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx, v = 2\sqrt{x}$. Добиваме:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 4 \ln 4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 4 = 4 \cdot (\ln 4 - 1).$$

б) Со користење на парцијална интеграција имаме: $u = \ln 2x, du = \frac{dx}{x}, dv = x^3 dx, v = \frac{x^4}{4}$.

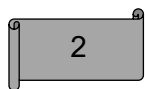
Добиваме:

$$\begin{aligned} \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{x^4}{16} \Big|_2^4 = \frac{1}{4} (4^4 \ln 8 - 2^4 \ln 4) - \frac{1}{16} (4^4 - 2^4) = 184 \ln 2 - 15. \end{aligned}$$

в) Со користење парцијална интеграција имаме: $u = \ln(x+1), du = \frac{dx}{x+1}, dv = dx, v = x$.

Добиваме:

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = ((e-1) \ln e) - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= e-1 - \left[\int_0^{e-1} \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} \right] = e-1 - \left[x \Big|_0^{e-1} - (\ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} \right] = e-1 - [(e-1-0) - (\ln e - \ln 1)] = \\ &= e-1-e+1+\ln e = 1. \end{aligned}$$



Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_1^e x^2 \ln x$; б) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx$; в) $\int_0^{e-1} (x^2 + x) \ln(x+1) dx$.

Пример 3

Да го пресметаме определен интеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

Од парцијална интеграција имаме: $u = \ln^2 x, du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}, dv = \frac{1}{x^2} dx, v = -\frac{1}{x}$. Добиваме:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^e + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx,$$

За да го решиме интегралот $\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$, повторно треба да примениме парцијална интеграција, при што ќе имаме:

$$u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = \frac{1}{x^2} dx, v = -\frac{1}{x}.$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1,$$

ако ова го замениме во првиот интеграл ќе добиеме:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{2}{e} + 1 \right) = -\frac{5}{e} + 2.$$

Задачи за самостојна работа

1. Да се пресметаат следниве интеграли:

а) $\int_0^1 (2x+1)e^x dx;$

б) $\int_1^2 (3x+5)e^{-x} dx;$

в) $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1)e^x dx;$

г) $\int_0^1 (x^2 - 2)e^x dx;$

д) $\int_1^e \ln x dx;$

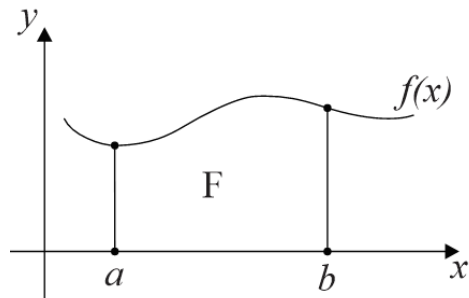
ѓ) $\int_1^e x^2 \ln x dx;$

е) $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$

ж) $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx.$

9. Плоштина на рамнински лик

Од дефиницијата на определениот интеграл видовме дека тој претставува плоштина на криволиниски трапез кој е определен со графикот на ненегативната функција $f(x)$ и x -оската на интервалот $[a, b]$, (слика 11).

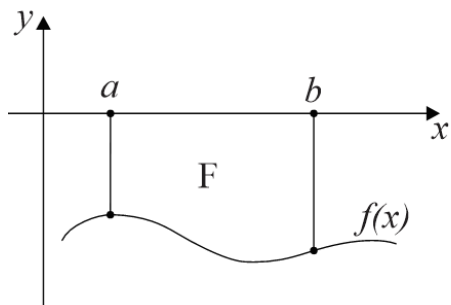


Слика 11

Значи за плоштината на криволинискиот трапез од слика 11 имаме дека:

$$P(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

Во случај кога функцијата е негативна, вредноста на определениот интеграл ќе биде негативна (слика 12).



Слика 12

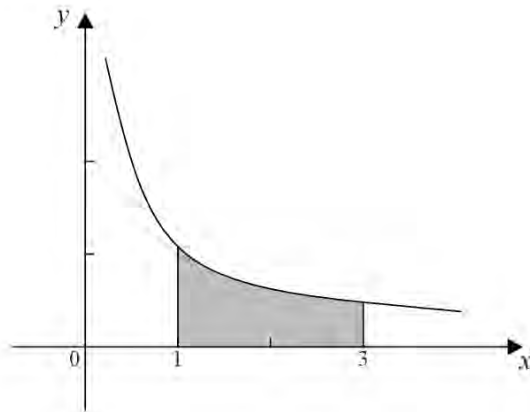
Значи за да ја пресметаме, плоштината на фигурата F во случај кога функцијата $f(x)$ е негативна, вредноста на определениот интеграл ќе ја ставиме во знак за апсолутна вредност, за да добиеме позитивен број, бидејќи плоштината не може да биде негативна.

$$P(F) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Пример 1

Да ја пресметаме плоштината на фигурата, ограничена со кривата $y = \frac{1}{x}$, апсцисната оска и правите $x=1$ и $x=3$.

На слика 13 се прикажани кривата и двете прави:

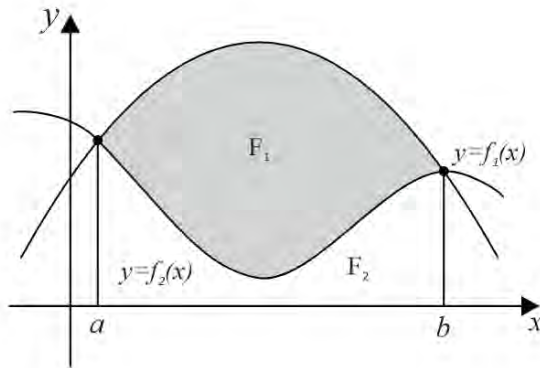


Слика 13

Според претходното објаснување, за да ја пресметаме плоштината на обоениот дел добиваме:

$$P = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Да разгледаме сега како ќе ја пресметаме плоштината на фигура која е ограничена со графици на функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на интервалот $[a, b]$, слика 14.



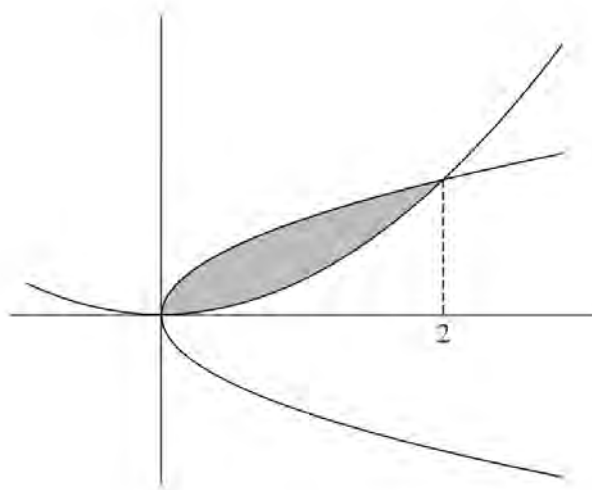
Слика 14

Ако со F_1 го означиме криволинискиот трапез под графикот на функцијата $f_1(x)$, а со F_2 го означиме криволинискиот трапез под графикот на функцијата $f_2(x)$ тогаш фигурата F може да се претстави како разлика на криволинискиот трапез F_1 со криволинискиот трапез F_2 . Од каде што можеме да заклучиме дека плоштината на фигурата F е еднаква на разликата на плоштината на криволинискиот трапез F_1 и криволинискиот трапез F_2 т.е.

$$P(F) = P(F_1) - P(F_2) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

Пример 2

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 15) ограничена со параболите $y^2 = 2x, x^2 = 2y$.



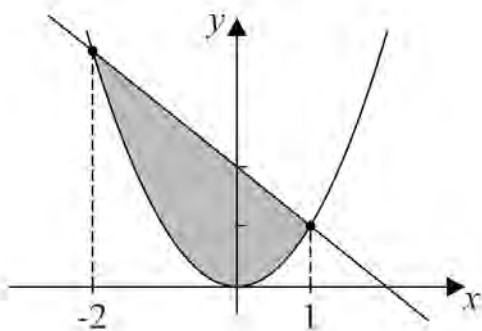
Слика 15

Параболите кои ја ограничуваат фигурата чија што плоштина треба да се определи се претставени на слика 15. Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интегрирање. Од $y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}, y > 0$ тогаш $\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2}, 2x = \frac{x^4}{4}$. Од $x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$. Значи пресечни точки се $A(0,0), B(2,2)$. Плоштината на криволинискиот трапез ограничен со кривата $y^2 = 2x$ е $F_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx$. А плоштината на криволинискиот трапез ограничен со кривата $x^2 = 2y$ е $F_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$. Па плоштината на фигурата што ја бараме е $F = F_1 - F_2$, т.е

$$F = \int_0^2 \sqrt{2x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} - \frac{x^3}{6} \right) \bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Пример 3

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 16) ограничена со параболата $y = x^2$ и правата $x + y = 2$.

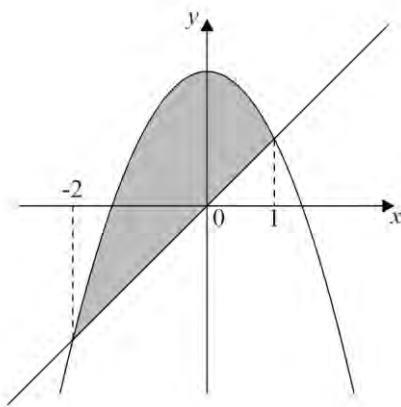


Слика 16

Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интервалот по кој интегрираме. Го заменуваме $y = x^2$ во $x + y = 2$ и ја добиваме квадратната равенка $x + x^2 = 2$. Со решавање на квадратната равенка $x^2 + x - 2 = 0$ се добива дека нејзини решенија се $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Значи пресечни точки се $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$. Плоштината на фигурата што ја бараме е:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Пример 4 ▶ Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 17) ограничена со параболата $y = 2 - x^2$ и правата $y = x$.



Слика 17

Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интегрирање. Го заменуваме $y = x$ во $y = 2 - x^2$ и ја добиваме квадратната равенка

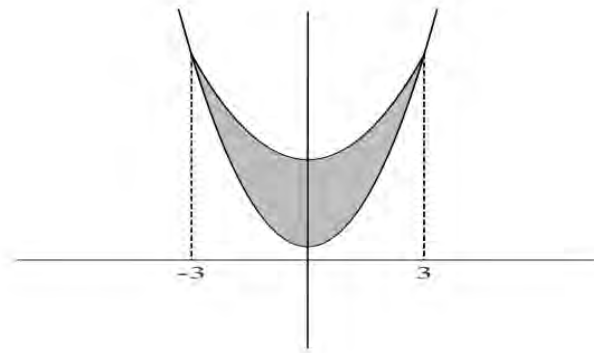
$x^2 + x - 2 = 0$. Со решавање на квадратната равенка се добива дека нејзини решенија се $x_1 = -2, x_2 = 1$, Значи пресечни точки се $A(-2, -2), B(1, 1)$.

Плоштината на фигурата што ја бараме е:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Пример 5

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 18) ограничена со параболите $y = 2x^2 + 1$ и $y = x^2 + 10$.



Слика 18

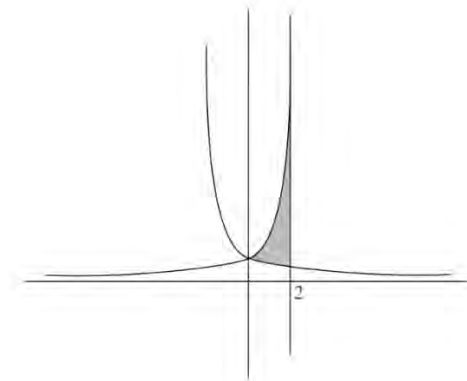
Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интегрирање. Ако ги изедначиме равенките добиваме $2x^2 + 1 = x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$. Плоштината на фигурата што ја бараме е:

$$F = \int_{-3}^3 (x^2 + 10 - 2x^2 - 1) dx = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 36.$$

При решавањето користиме дека и двете функции се парни (симетрични во однос на y -оската).

Пример 6

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 19) ограничена со кривите $y = e^x, y = e^{-x}$ и правата $x = 2$.



Слика 19

Од слика 19 може да се види површина на која x се движи од 0 до 2 и дека горната крива е $y = e^x$, а долната крива е $y = e^{-x}$. Пресечните точки на двете криви можеме да ги добиеме и од:

$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x}$$

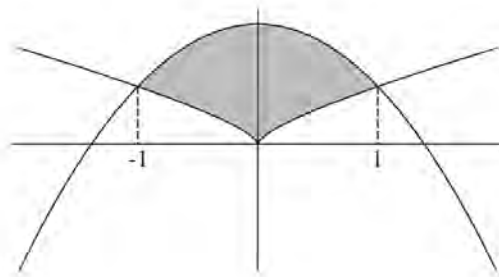
$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Оттука за плоштината имаме:

$$F = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^{-0}) = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2.$$

Пример 7

Да се пресмета плоштината на фигурата (слика 20) ограничена со кривите $y = 2 - x^2$, $y^3 = x^2$.



Слика 20

Го наоѓаме пресекот на двете криви и ги добиваме пресечните точки $x_1 = -1, x_2 = 1$. Од слика

$$20 \text{ гледаме дека } F = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{2}{15}.$$

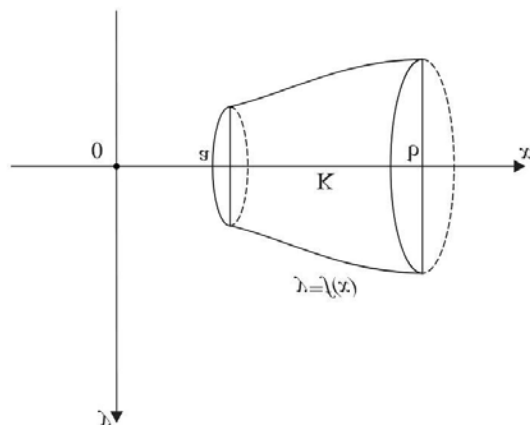
Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.
2. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = x^2 + x + 3$ и правата $y = x + 7$.
3. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.
4. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.
5. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ и правите $y = 0, x = e$.
6. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $y = \frac{1}{x^2}$ и правата $y = x$.
7. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $y = e^x, y = e^{-x}$ и правата $x = 1$.

10. Волумен на ротационо тело

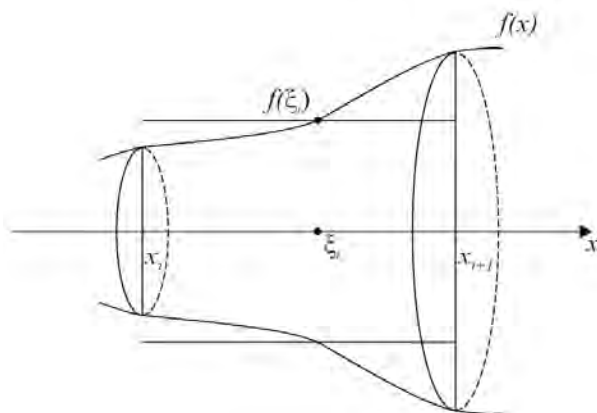
Со помош на определен интеграл може да се пресмета волумен на тело. Во продолжение ќе покажеме како можеме да пресметаме волумен на ротационо тело со помош на определен интеграл. Ќе покажеме како се доаѓа до формулата за пресметување на волумен на ротационо тело, со користење на дефиницијата на определен интеграл. Нека f е непрекината функција на интервалот $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ за секој $x \in [a, b]$.

Со ротирање на криволинискиот трапез под кривата $f(x)$ на интервалот $[a, b]$ околу x -оската се добива ротационото тело K (слика 21).



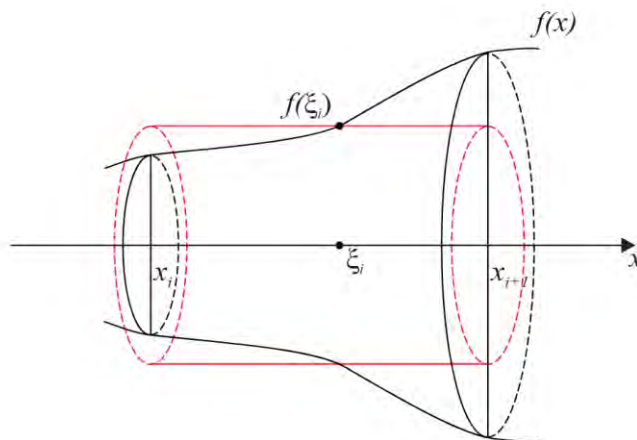
Слика 21

Со цел приближно да се пресмета волуменот на ротационото тело, слично како што работевме во дефиницијата за определен интеграл, интервалот $[a, b]$ ќе го поделиме на n потсегменти, со некоја поделба P . Ќе се фокусираме, на потсегментот $[x_i, x_{i+1}]$. Бираме точка $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и во оваа точка ќе ја определиме вредноста на функцијата $f(\xi_i)$. Во точката $f(\xi_i)$ ќе повлечеме права паралелна на x -оската. Кога овој криволиниски трапез ротира околу x -оската се добива ротационо тело (слика 22).



Слика 22

Но ќе ја ротираме и правата што поминува низ $f(\xi_i)$ и е паралелна на x -оската. Всушност волуменот на ротациониот криволиниски трапез ќе го апроксимираме со волуменот на цилиндарот (слика 23).



Слика 23

Волуменот на овој цилиндар е $V_i = f^2(\xi_i) \pi \Delta x_i$, каде $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ е висината на цилиндарот, додека $f(\xi_i)$ е неговиот радиус. Како што кажавме интервалот $[a, b]$ го поделивме на n потсегменти и ако ги сумираме волумените на сите цилиндри на интервалите $[x_i, x_{i+1}]$ за $i = 0, \dots, n-1$ ќе добиеме $\sum_{i=1}^n f^2(\xi_i) \pi \Delta x_i$. Колку е пофина поделбата на интервалот $[a, b]$, толку е помала разликата помеѓу волуменот на цилиндарот и делот од ротациониот цилиндар на разгледуваниот подсегмент $[x_i, x_{i+1}]$, па за $n \rightarrow \infty$ можеме да сметаме дека последната сума е волуменот на ротационото тело K . Ова е Риманова сума за функцијата $f^2(x) \pi$. Кога ќе постои граничната вредност на оваа Риманова сума ќе постои и волуменот на ротационото тело. Од овде можеме да кажеме дека за волуменот на ротационото дело важи формулата:

$$V(K) = \int_a^b f^2(x) \pi dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

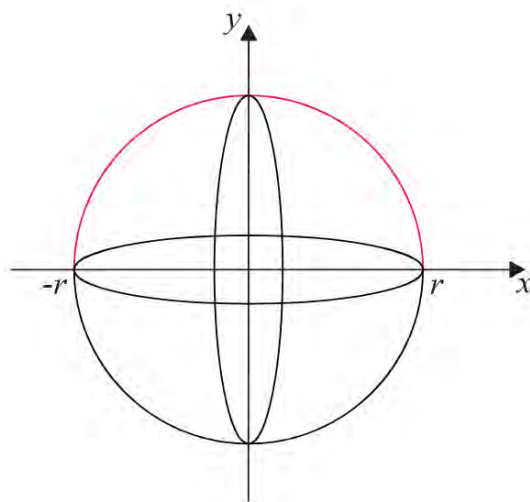
Теорема 1: Нека f е непрекината функција на интервалот $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ за секој $x \in [a, b]$. Тогаш волуменот на ротационото тело K , добиено со ротација околу x -оската на криволинискиот трапез на интервалот $[a, b]$ е еднаков на:

$$V(K) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Пример 1

Да покажеме дека волуменот на топка е еднаков $\frac{4}{3} r^3 \pi$.

Топката ќе ја добиеме со ротација на кругот $x^2 + y^2 = r^2$ околу x -оската. Од равенката $x^2 + y^2 = r^2$ имаме $y^2 = r^2 - x^2$.



Слика 24

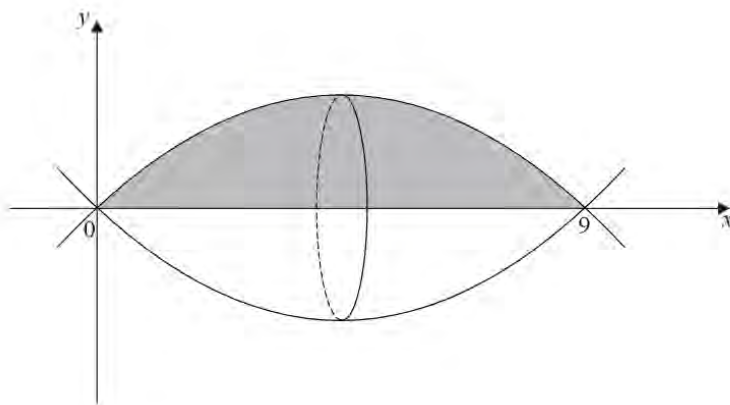
За да го пресметаме волуменот на топката, ќе ја разгледуваме само ротацијата на горниот полукруг (означен со црвено), и добиваме:

$$V(K) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x \Big|_{-r}^r - \frac{x^3}{3} \Big|_{-r}^r \right] = \pi \left[r^2 (r + r) - \frac{1}{3} (r^3 + r^3) \right] = \pi \left[2r^3 - \frac{2r^3}{3} \right] = \frac{4r^3 \pi}{3}.$$

Пример 2

Да го пресметаме волуменот на телото што се добива со ротација на кривата $y = 9x - x^2$ околу x -оската.

Пресечни точки на графикот на функцијата $y = 9x - x^2$ со x -оската се 0 и 9 бидејќи $9x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(9 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 9$. Со ротирање ќе се добие фигурата дадена на слика 25.



Слика 25

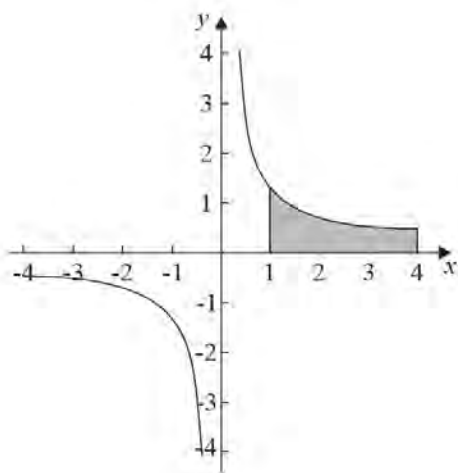
Па за волуменот ќе добиеме:

$$V = \pi \int_0^9 (9x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^9 (81x^2 - 18x^3 + x^4) dx = \pi \left[81 \frac{x^3}{3} \Big|_0^9 - 18 \frac{x^4}{4} \Big|_0^9 + \frac{x^5}{5} \Big|_0^9 \right] \\ = \pi \left[27 \cdot 9^3 - \frac{9}{2} \cdot 9^4 + \frac{9^5}{5} \right] = 1968,3\pi.$$

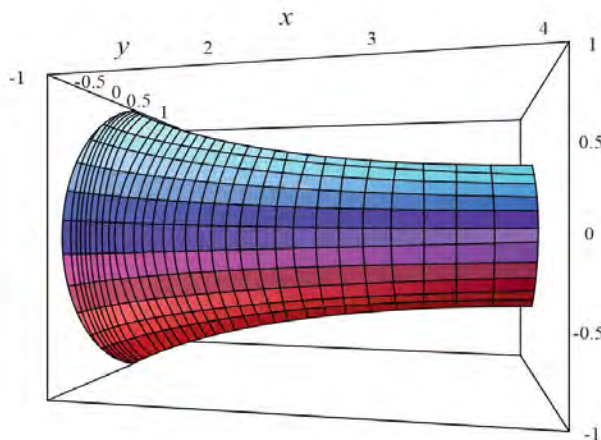
Пример 3

Да го пресметаме волуменот на телото што се добива со ротација околу x -оската на делот од рамнината ограничен со кривата $y = \frac{1}{x}$, и правите $y = 0, x = 1, x = 4$.

(Фигурата што е ограничена со дадената крива и правите и која ротира околу x -оската е дадена на слика 26а. Додека телото чиј што волумен се бара е дадено на слика 26б.)



Слика 26 а)



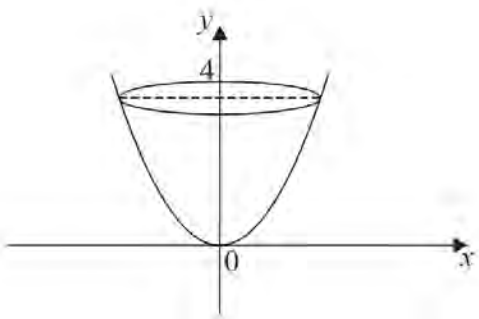
Слика 26 б)

$$V = \pi \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^4 \right) = \pi \left(-\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Пример 4

Да го пресметаме волуменот на телото што се добива со ротација на параболата $y = x^2$ околу y -оската на интервалот $0 \leq y \leq 4$.

Телото што се добива со ротација на параболата се нарекува параболоид. За нашиот пример со дадени ограничувања, параболоидот е претставен на слика 27.



Слика 27

Овде треба да нагласиме дека ротирањето е околу y -оската, па горната формула прилагодена кога се врши ротација околу y -оската ќе биде: $V(K) = \pi \int_a^b x^2 dy$.

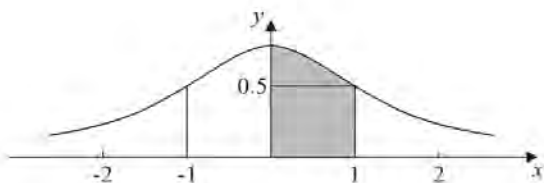
Значи имаме:

$$V = \pi \int_0^4 x^2 dy = \pi \int_0^4 y dy = \pi \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \pi \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 8\pi.$$

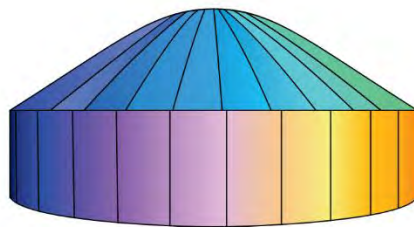
Пример 5

Да го пресметаме волуменот на телото што се добива со ротација околу y -оската на телото ограничено со кривата $y = \frac{1}{1+x^2}$ и правите $y=0$, $x=-1$, $x=1$.

Од равенката на кривата следува дека $x^2 = \frac{1}{y} - 1$. Волуменот на ротационото тело ќе биде збир од волуменот на ротационото тело што се добива со ротација околу y -оската на правата $x=1$, за $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ и волуменот на ротационото тело што се добива со ротација околу y -оската на кривата $x^2 = \frac{1}{y} - 1$, за $y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. На слика 28а) е дадена фигура со чија ротација се добива ротационото тело, а на слика 28б) е дадено самото тело.



Слика 28 а)



Слика 28 б)

$$V = \pi \left(\int_0^{\frac{1}{2}} dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{y} - 1 \right) dy \right) = \pi \left(y \Big|_0^{\frac{1}{2}} + (\ln|y| - y) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \pi \left(-\ln \frac{1}{2} \right) = \pi (-\ln 2^{-1}) = \pi \ln 2.$$

Задачи за самостојна работа

1. Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ околу } x\text{-оската.}$$

2. Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација околу x -оската на телото ограничено со параболата $y^2 = x - 1$ и правата $y = x - 2$.

3. Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација на параболата $y^2 = 2(x - 1)$ околу x -оската на интервалот $1 \leq x \leq 3$.

4. Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација околу x -оската на телото ограничено со кривите $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + 2y^2 = 1$.

5. Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација околу x -оската на телото ограничено со кривата $y = \frac{4}{x}$ и правите $y = x, x = 4$.

11. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int \sqrt[4]{x^3} dx \quad \text{б) } \int \frac{2}{x^5} dx \quad \text{в) } \int (3 + x^3)^3 dx \quad \text{г) } \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$\text{д) } \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx \quad \text{е) } \int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} dx \quad \text{ж) } \int \frac{dx}{\sqrt{3x - 4}} \quad \text{з) } \int \frac{dx}{(5x - 2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\text{и) } \int \frac{dx}{2 + 3x^2} \quad \text{к) } \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt[4]{x + 5}} dx; \quad \text{л) } \int \frac{2x - 3}{1 - x} dx;$$

2. Со примена на формулата на Њутн-Лајбниц, пресметај ги интегралите:

$$\text{а) } \int_1^2 \sqrt[4]{x^3} dx, \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx,$$

$$\text{в)} \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + x^3 \right) dx,$$

$$\text{г)} \int_0^1 2x^4 + 3x^2 + 1.$$

3. Со помош на интегрирање со смена пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$$

$$\text{б)} \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$$

$$\text{в)} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\text{г)} \int_0^1 \sqrt{(1 - x^2)^3},$$

4. Со помош на интегрирање со смена пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx,$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

5. Со помош на методот на парцијална интеграција пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_0^1 \frac{2x + 3}{e^x} dx$$

$$\text{б)} \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

6. Со помош на методот на парцијална интеграција пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_1^2 x \ln(2x^2 - 1) dx$$

$$\text{б)} \int_2^4 (2x - 1) \ln x dx$$

7. Со помош на парцијална интеграција пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_0^{e-2} \ln(x + 2) dx$$

$$\text{б)} \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

8. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = 2x^2 + 1$ и $y = x^2 + 10$.

9. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $y = 2x - x^2$ и правата $x + y = 0$.

10. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација околу y -оската на телото ограничено со кривата $y = x^3$ и правите $y = 8$ и $x = 0$.

11. Пресметај го волуменот на телото што се добива со ротација околу x -оската на телото ограничено со кривата $y = 2 - x^2$ и правата $y = 1$.

12. Функцијата на граничните трошоци е дадена со $C_g(x) = \frac{600}{\sqrt{40x + 1}}$, каде x е број на произведени единици. При производство и продажба на 10 единици, вкупните трошоци се 1000, т.е. $C(10) = 1000$. Да се најде функцијата на вкупните трошоци.

Модуларна единица 3 – Матрици (за сите останати струки)

Почетоците на математичката дисциплина Линеарна алгебра, која се смета за релативно млада математичка област, датираат од воведувањето и примената на детерминантите, кои првично се користеле за решавање на системи од линеарни равенки. Во 1693 година во работата на германскиот математичар Готфрид Вилхелм фон Лајбниц (1646-1716) се користени детерминанти, а швајцарскиот математичар Габријел Крамер (1704-1752) во 1750 година го извел т.н. Крамерово правило за решавање на системи линеарни равенки. Подоцна, германскиот математичар Јохан Карл Фридрих Гаус (1777-1855) го вовел Гаусовиот метод на елиминација за решавање на системи линеарни равенки. Поимот матрица прв пат се среќава во работата на англиските математичари. Овој термин е воведен од Џејмс Џозеф Силвестер (1814-1897) во 1848 година. Множењето на матрици и наоѓањето на инверзна матрица се дефинирани од Артур Кејли (1821-1895).

1. Поим за детерминанти од втор и трет ред

Во прва година се запознаваме со детерминанти од втор ред. Овде повторно ќе се потсетиме на нив и ќе дефинираме детерминанта од трет ред.

Детерминанта од втор ред

Дефиниција 1: Детерминанта од втор ред е квадратна шема на претставување на изразот $a_1b_2 - a_2b_1$ т.е

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1b_2 - a_2b_1$$

каде a_1, a_2, b_1, b_2 се реални броеви или изрази, кои се распределени во две редици и две колони.

Пример 1

Да ја пресметаме детерминантата од втор ред

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 5 + 6 = 11.$$

1

Пресметај ги следниве детерминанти од втор ред: а) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

Пример 2

Да ја решиме равенката $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = 0$, по непознатата x . Прво, ја пресметуваме детерминантата $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 6x$ и ја добиваме равенката $x^2 - 6x = 0$ чии решенија $x_1 = 0, x_2 = 6$.

2

Реши ги равенките по непознатата x : а) $\begin{vmatrix} x^2 - 2 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x - 2 & 4 \\ 3 & x + 2 \end{vmatrix} = 0$.

Пример 3

Да ја решиме неравенката $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} \geq 0$ по непознатата x . Ја пресметуваме детерминантата $\begin{vmatrix} x & 2x \\ 3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 6x$ и ја добиваме неравенката $x^2 - 6x \geq 0$ која е точна за $x \in (-\infty, 0] \cup [6, \infty)$.

3

Реши ги неравенките по непознатата x : а) $\begin{vmatrix} x^2 - 2 & 1 \\ -x & 1 \end{vmatrix} < 0$; б) $\begin{vmatrix} x - 2 & 4 \\ 3 & x + 2 \end{vmatrix} > 0$.

Детерминанта од трет ред

Дефиниција 2: Детерминанта од трет ред е квадратна шема на претставување на изразот $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$ т.е

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$$

каде $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ се реални броеви или изрази, кои се распределени во три редици и три колони.

Реалните броеви $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ или изрази се нарекуваат елементи на детерминантата. Елементите a_1, b_2, c_3 се елементи од **главната дијагонала**, а a_3, b_2, c_1 се елементи од **споредната дијагонала** на детерминантата од трет ред. Пресметувањето на детерминанта (за да не се памти формулата) се прави со помош на некои правила како

Сарусовото правило и **правилото на триаголници**, кои ќе ги презентираме во продолжение:

Сарусово правило: Првата и втората колона од детерминантата од трет ред се допишуваат како четврта и петта колона во шемата. Се прават производи на елементите на главната дијагонала и на елементите на двете дијагонали кои се паралелни со главната дијагонала, кои влегуваат во пресметките со знак "+" и производи од елементите на споредната дијагонала и на двете дијагонали кои се паралелни со споредната дијагонала, кои влегуваат со знак "-" т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

Пример 4

Да ја пресметаме детерминантата од трет ред со Сарусово правило:

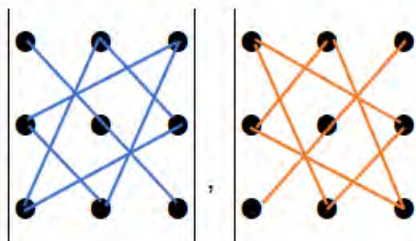
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot 0 = -3$$

4

Пресметај ги следниве детерминанти од трет ред со Сарусово правило:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -3 & -1 & b \\ -a & ab & 4 \end{vmatrix}.$$

Правило на триаголници: Елементите од детерминантата се третираат како темиња на триаголници. Се прават производи од елементите на главната дијагонала и на елементите со улога на темиња на двата триаголника чија една страна е паралелна со главната дијагонала и тие влегуваат во пресметките со знак "+" (означени со сина боја), и производи од елементите на споредната дијагонала и елементите со улога на темиња на двата триаголника чија една страна е паралелна со споредната дијагонала, кои влегуваат со знак "-" (означени со црвена боја), според следната шема:



Пример 5

Да ја пресметаме детерминантата од трет ред со правило на триаголници според следната шема:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{т.е. } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-2) - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot 0 \cdot 0 = -3.$$

5

Пресметај ги следниве детерминанти од трет ред со правило на триаголници

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -3 & -1 & b \\ -a & ab & 4 \end{vmatrix}.$$

Спореди ги добиените решенија со решенијата на истите детерминанти од задача 4!

Детерминантите може да ги решаваме и со развивање на детерминантата по елементите на дадена редица т.е. колона. Пред да го покажеме ова правило ќе воведеме два поими минор и алгебарски комплемент. Детерминантата од трет ред ќе ја означувиме со Δ и можеме да ја претставиме и со означување на нејзините елементи со една буква a и како индекс местоположбата на елементот во однос на редицата и колоната во детерминантата (a_{22} има индекс 22, што значи дека се наоѓа во втора редица и втора колона):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Дефиниција 3: Нека Δ е детерминанта од трет ред и за произволно избрани индекси $1 \leq i, j \leq 3$ се изоставуваат елементите од i -тата редица и j -тата колона. За бројот Δ_{ij} велиме дека е **минор** на Δ што соодветствува на елементот a_{ij} .

Дефиниција 4: Алгебарски комплемент на елементот a_{ij} во детерминантата од трет ред Δ е бројот $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Пресметувањето на детерминантите од трет ред може да се изврши со развивање на детерминантата преку елементите на една нејзина редица (колона) и нивните соодветни минори.

Теорема 1: Вредноста на детерминантата од трет ред Δ може да се добие како збир од производите на елементите на i -тата редица (j -тата колона) помножени со нивните соодветни алгебарски комплементи т.е. $\Delta = a_{i1} \cdot a_{i1}^* + a_{i2} \cdot a_{i2}^* + a_{i3} \cdot a_{i3}^*$, $1 \leq i \leq 3$ ($\Delta = a_{1j} \cdot a_{1j}^* + a_{2j} \cdot a_{2j}^* + a_{3j} \cdot a_{3j}^*$, $1 \leq j \leq 3$).

Доказ: Сосем произволно ја избираме третата колона и ќе докажеме дека за $j = 3$ имаме $\Delta = a_{13} \cdot a_{13}^* + a_{23} \cdot a_{23}^* + a_{33} \cdot a_{33}^*$. Од дефиниција 2, детерминантата од трет ред е

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - \\ &\quad - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ &= a_{13} \cdot a_{13}^* + a_{23} \cdot a_{23}^* + a_{33} \cdot a_{33}^* \end{aligned}$$

Аналогно се докажува и за $i = 1, 2, 3$ и за $j = 1, 2$. ■

Пример 6

Вредноста на детерминантата од трет ред развиена по третата колона е

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2 + 1) = -3.$$

Спореди ја со вредноста на детерминантата од пример 5. Што заклучуваш?



Пресметај ја детерминантата од пример 6, развивајќи ја по:

а) втората редица б) првата колона.

Како и кај детерминантите од втор ред и со детерминанти од трет ред, ние можеме да решаваме равенки и неравенки.

7

Реши ги равенките по непознатата x :

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x+2 & 2 & 2 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ 2 & x-2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8

Реши ги неравенките по непознатата x :

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} < 5+x; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} > 3-x.$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги следниве детерминанти:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{vmatrix} 2\sin x & 3 \\ \sin 2x & \cos x \end{vmatrix}; & \text{б) } & \begin{vmatrix} p & q \\ p^2 & q^2 \end{vmatrix}; & \text{в) } & \begin{vmatrix} p-q & p^2+q^2 \\ -1 & p+q \end{vmatrix}; \\ \text{г) } & \begin{vmatrix} a & b+d & 1 \\ b & d+a & 1 \\ d & a+b & 1 \end{vmatrix}; & \text{д) } & \begin{vmatrix} n+2 & 2 & 2 \\ 2 & m+2 & 2 \\ 2 & 2 & p+2 \end{vmatrix}; & \text{е) } & \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \cos x \\ \cos x & 1 & 1 \\ \cos x & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2. Пресметај ги следните детерминанти од трет ред со развивање по некоја редица или колона:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Реши ги следните равенки по непознатата x :

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x+1 & (x+1)^2 \end{vmatrix} = 0; & \text{б) } & \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 5x+1 & x+1 \end{vmatrix} = x-2; \\ \text{в) } & \begin{vmatrix} 3 & 0 & x+3 \\ 3 & 2 & (x+3)^2 \\ 3 & 3 & (x+3)^3 \end{vmatrix} = 0; & \text{г) } & \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 1 \\ x & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3x. \end{aligned}$$

4. Реши ги следните неравенки по непознатата x :

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x+1 & x+1 \end{vmatrix} \leq 2-x; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & 1 \\ x+3 & 2 & 1 \\ 3 & x+3 & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

2. Својства на детерминанта од втор и трет ред

Овде ќе бидат дадени својствата на детерминантите од втор и трет ред. Некои својства се идентични и кај детерминантите од втор и кај детерминантите од трет ред, затоа тие својства ќе бидат дадени само еднаш.

1⁰ Ако во една детерминанта, две редици (колони) си ги променат местата, тогаш детерминантата го менува знакот.

Јасно е за детерминантата од втор ред $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, ако двете редици си ги

променат местата $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ тогаш детерминантата го менува знакот.



Провери го својство 1⁰ кај детерминантата од трет ред $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ кога

втората и третата колона ќе си ги сменат местата.

Пример 1

а) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$ ако редиците си ги заменат местата добиваме $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$. Очигледно е дека детерминантата го менува знакот.

б) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15$, кога првата и третата колона ќе си ги заменат

местата добиваме: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 15$. Очигледно е дека детерминантата го менува знакот.

2 а) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ смени ги местата на двете колони, а потоа пресметај ги двете детерминанти. Што заклучуваш?

б) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ смени ги местата на втората и третата редица, а потоа пресметај ги двете детерминанти. Што заклучуваш?

2⁰ Ако соодветните елементи од две различни редици (колони) во детерминанта се еднакви меѓу себе, тогаш вредноста на детерминантата е нула.

За детерминантата од трет ред, каде соодветните елементи од првата и втората редица се еднакви, вредноста на таа детерминанта е нула т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{13}a_{11} - a_{11}a_{12}a_{33} = 0.$$

3 Провери го својство 2⁰ кај детерминанта од втор ред кога двете колони имаат еднакви соодветни елементи !

Пример 2 а) Детерминантата $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = -35 + 35 = 0$, каде и двете редици имаат еднакви соодветни елементи има вредност 0.

б) Детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 4 + 20 - 4 + 8 - 20 = 0$, каде и втората и третата колона имаат еднакви соодветни елементи има вредност 0.

4 Пресметај: а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. Образложи го решението!

3⁰ Ако соодветните елементи на две редици (колони) во една детерминанта се пропорционални тогаш детерминантата има вредност нула.

За детерминантата од трет ред, каде соодветните елементи од првата и втората редица се пропорционални имаме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12}a_{33} + ka_{11}a_{32}a_{13} + ka_{12}a_{13}a_{31} - ka_{13}a_{12}a_{31} - ka_{32}a_{13}a_{11} - ka_{11}a_{12}a_{33} = 0.$$

5 Провери го својство 3⁰ кај детерминанта од втор ред кога двете колони имаат пропорционални соодветни елементи !

Пример 3 а) Детерминантата $\begin{vmatrix} -5 & -10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 10 = 0$, бидејќи елементите од првата и втората редица се пропорционални: $\frac{-5}{1} = \frac{-10}{2}$.

б) Детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 6 + 6 - 6 = 0$, бидејќи елементите од првата и втората колона се пропорционални: $\frac{1}{-3} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$.

6 Пресметај: а) $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. Образложи го решението!

4⁰ Ако сите елементи во некоја редица (колона) во детерминанта се еднакви на нула, тогаш детерминантата има вредност нула.

Детерминантата од втор ред $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, бидејќи елементите од втората редица се еднакви на нула.

7 Провери го својство 4⁰ кај детерминанта од трет ред каде елементи од втората колона се еднакви на нула.

Пример 4 Детерминантите $\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ имаат вредност нула, бидејќи во

детерминантата од втор ред елементите од втората колона се нули, а во детерминантата од трет ред елементите од третата редица се нули.

8 Пресметај: а) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Образложи го решението !

5^o Вредноста на детерминанта не се менува ако сите елементи од една редица (колона) се помножат со еден ист број k и така добиените производи се додадат на соодветните елементи од некоја друга редица (колона).

За детерминантата од втор ред, каде соодветните елементи од втората редица се помножени со ист број k и се додадени на соодветните елементи од првата редица имаме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} + ka_{12})a_{22} - a_{12}(a_{12} + ka_{22}) = a_{11}a_{22} - ka_{12}a_{22} - a_{12}a_{12} - ka_{12}a_{22} \\ = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

вредноста на детерминантата не се менува.

9

Провери го својство 5^o кај детерминанта од трет ред каде елементи од втората колона се помножени со еден ист број k и се додадени на соодветните елементи од третата колона.

Пример 5

а) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$ на првата редица ги додаваме соодветните елементи од втората редица помножени со број 3 и добиваме детерминанта $\begin{vmatrix} 1+3 \cdot 3 & -1+2 \cdot 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$, која има иста вредност со почетната детерминанта.

б) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$ на втората колона ги додаваме соодветните

елементи од третата колона помножени со број -5 и добиваме детерминанта

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 \cdot (-5) & 3 \\ 0 & -1+(-2) \cdot (-5) & -2 \\ 0 & 0+(-1) \cdot (-5) & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -13 & 3 \\ 0 & 9 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -9 + 10 = 1, \text{ која има иста вредност со почетната}$$

детерминанта.

10

а) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$ на втората колона додади ги соодветните елементи од првата колона помножени со бројот $\frac{1}{3}$, а потоа пресметај ги двете детерминанти. Што заклучуваш?

б) Во детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ на третата редица додади ги соодветните елементи од

првата редица помножени со бројот 0,5, а потоа пресметај ги двете детерминанти. Што заклучуваш?

6⁰ Детерминанта се множи со број k така што со тој број k се множат елементите од една редица (колона) на детерминантата.

За детерминантата од трет ред чии елементи од втората редица се помножени со ист број k , имаме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{12}a_{33} + ka_{11}a_{32}a_{13} + ka_{12}a_{13}a_{31} - ka_{13}a_{12}a_{31} - ka_{32}a_{13}a_{11} - ka_{11}a_{12}a_{33} =$$

$$= k(a_{11}a_{12}a_{33} + a_{11}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{32}a_{13}a_{11} - a_{11}a_{12}a_{33}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

т.е. вредноста е еднаква на вредноста на почетната детерминанта помножена со бројот k .

11

Провери го својство 6⁰ кај детерминанта од втор ред каде елементите од втората колона се помножени со еден ист број k .

Пример 6

Од $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 + 15) = 38$ и $\begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 30 = 38$ јасно е

дека $2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$.

12

Пресметај ги детерминантите $-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} 1 & -3 \cdot 0 & 1 \\ 1 & -3 \cdot 5 & -2 \\ -3 & -3 \cdot 1 & -1 \end{vmatrix}$. Што

заклучуваш?

7⁰ Ако секој елемент од една редица (колона) на детерминантата е збир од два собирок тогаш детерминантата може да се претстави како збир од две детерминанти. Елементите во првата детерминанта (првиот собирок-детерминанта) во споменатата редица (колона) се првите собироци и елементите во втората детерминанта (вториот собирок-детерминанта) во споменатата редица (колона) се вторите собироци, а останатите редици (колони) им се идентични со соодветните редици (колони) како и на почетната детерминанта.

Всушност,

$$\begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = (a+e)d - c(b+f) = (ad - bc) + (ed - fc) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$$

13

Провери го својство 7⁰ кај детерминанта од трет ред каде елементи од втората колона се се збир од собирока.

Пример 7

Вредноста на детерминантата $\begin{vmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ 1+0 & 5 & -2 \\ -3-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8$. Од

детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6$, јасно е дека

$$\begin{vmatrix} 1+3 & 0 & 0 \\ 1+0 & 5 & -2 \\ -3-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

14

Пресметај ги детермиантите $\begin{vmatrix} 1+2 & 3 \\ -5+3 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$! Што заклучуваш?

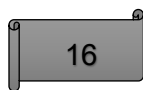
8⁰ Ако елементите од една редица (колона) на детерминанта од трет ред се линеарни комбинации од соодветните елементи на другите две редици (колони) тогаш вредноста на детерминантата е нула.

15

Со користење на својствата 3⁰ и 8⁰ покажи дека $\begin{vmatrix} k_1 a_{12} + k_2 a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ k_1 a_{22} + k_2 a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ k_1 a_{32} + k_2 a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$.

Детерминантите од облик $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$ всушност се **горнотриаголни**, а

детерминантите $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ всушност се **долнотриаголни**.



Покажи дека

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} \text{ и } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} !$$

Потоа, пресметај ја детерминантата $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ со користење на својствата на

детерминантите со кои ја трансформираме во горнотриаголна.

За алгебарските комплементи точно е својството:

9⁰ Кај детерминанта од трет ред, збирот на производите на елементите на која било редица (колона) со соодветните алгебарски комплементи на елементите од друга редица (колона) е нула.



За детерминантата од трет ред $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ провери дали збирот од

производите на елементите од третата редица со соодветните алгебарски комплементи на елементите од првата редица е нула т.е. $a_{31}a_{11}^* + a_{32}a_{12}^* + a_{33}a_{13}^* = 0 !$

Задачи за самостојна работа

1. Провери дали:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} ?$$

2. Со користење на својствата на детерминанти пресметај:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -8 & -16 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} a-b & ac-bc \\ c+1 & c+c^2 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}!$$

3. Со користење на својствата на детерминанти докажи:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \sin(x+y) & \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) & \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \cos 2\beta & \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \\ \cos 2\gamma & \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}!$$

4. Со користење на некои својства на детерминанти, пресметај ги следните детерминанти од трет ред со трансформирање во горнотриаголна или долнотриаголна:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

5. За детерминантата од трет ред $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ докажи дека $a_{13}a_{11}^* + a_{23}a_{21}^* + a_{33}a_{31}^* = 0!$

3. Решавање на систем од три линеарни равенки со три непознати и дискусија за множеството решенија

Претходно се запознавме со линеарна равенка со две непознати и нејзиното множество на решенија, како и со систем од две линеарни равенки со две непознати и методите на нивно решавање. Како методи за решавање на систем од две линеарни равенки со две непознати ги спомнавме методот на замена, методот на спротивни коефициенти, графичкиот метод и Крамеровите правила (решавање со помош на детерминанти од втор ред). Овде ќе воведеме систем од три линеарни равенки со три непознати и детерминантите од трет ред ќе ги искористиме за негово решавање. Решавањето на систем од три линеарни равенки

со три непознати со детерминанти од трет ред е всушност користење на Крамеровите правила.

Дефиниција 1: Множеството од три линеарни равенки со три непознати за кои се бараат заедничките решенија се вика **систем од три линеарни равенки со три непознати**:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

каде $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$. Броевите $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ се нарекуваат коефициенти пред непознатите, а броевите d_1, d_2, d_3 се нарекуваат слободни членови на системот.

Овој облик на системот се вика **нормален** или **општ облик** на систем од три линеарни равенки со три непознати.

Во суштина се зборува за конјункција на три линеарни равенки со три непознати.

Решението на систем од три линеарни равенки со три непознати, е дадено во следната дефиниција:

Дефиниција 2: Решение на систем од три линеарни равенки со три непознати е секоја подредена тројка од допуштени реални броеви (x_0, y_0, z_0) за која и трите

равенки во системот $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ поминуваат во вистинити искази

т.е. $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2 \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3 \end{cases}$.

Во однос на решението точно е:

Системот може да има **единствено решение** (системот е определен), да **нема решение** (системот е противречен) или да има **бесконечно многу решенија** (системот е неопределен).

Многу често системите не се дадени во општ облик, туку треба да се трансформираат со дозволени математички трансформации.

Затоа, важно е:

Два системи од три линеарни равенки со три непознати се **еквивалентни** на иста дефиниционата област, ако секое решение на едниот систем е решение и на другиот систем.

Систем еквивалентен на дадениот се добива кога која и да било равенка од системот се замени со еквивалентна равенка.

Систем од три линеарни равенки со три непознати, ако не е во општ облик тогаш со користење на еквивалентни системи на дадениот може да се сведе во нормален (општ) облик.

Нека е даден системот од три линеарни равенки со три непознати во нормален облик:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Коефициентите $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ пред непознатите x, y, z и слободните членови d_1, d_2, d_3 ги образуваат детерминантите

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата Δ , образувана од коефициентите $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ пред непознатите x, y, z се нарекува **детерминанта на системот**. А останатите три детерминанти $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ се нарекуваат **детерминанти на непознатите x, y, z** соодветно.

Точно е:

Системот од три линеарни равенки со три непознати $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ може да се реши со детерминантите $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$. **Единствено решение** се добива со формулите $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$ $\Delta \neq 0$, кои се нарекуваат **Крамерови правила**.

Нека (x_0, y_0, z_0) е решение за системот $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ т.е. се добиваат вистинити

искази $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2 \\ a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3 \end{cases}$. Првото равенство го множиме со алгебарскиот комплемент

a_1^* на елементот a_1 . Второто равенство го множиме со алгебарскиот комплемент a_2^* на елементот a_2 . Третото равенство со алгебарскиот комплемент a_3^* на елементот a_3 . Потоа ги собираме и добиваме:

$$a_1^*(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) + a_2^*(a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0) + a_3^*(a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0) = a_1^*d_1 + a_2^*d_2 + a_3^*d_3$$

Со користење на Својство 10 од својствата на детерминанти од трет ред и Теорема 1 во првата наставна единица се добива:

$$x_0 \underbrace{(a_1^*a_1 + a_2^*a_2 + a_3^*a_3)}_{\Delta} + y_0 \underbrace{(a_1^*b_1 + a_2^*b_2 + a_3^*b_3)}_0 + z_0 \underbrace{(a_1^*c_1 + a_2^*c_2 + a_3^*c_3)}_0 = \underbrace{a_1^*d_1 + a_2^*d_2 + a_3^*d_3}_{\Delta_x}$$

т.е. $x_0 \cdot \Delta = \Delta_x$.

На ист начин со множење на равенствата со алгебарските компленти на елементите од втората колона се добива $y_0 \cdot \Delta = \Delta_y$ и со множење на равенствата со алгебарските компленти на елементите од третата колона се добива $z_0 \cdot \Delta = \Delta_z$. На крај се добива дека тројката броеви (x_0, y_0, z_0) , која е решение на системот од три линеарни равенки со

три непознати е решение и на системот $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$. Нека $\Delta \neq 0$ и произволна подредена

тројка броеви (x_0, y_0, z_0) е единствено решение на системот $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$. Тогаш

таа е решение и на системот $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$. Од овде се добиваат формулите

$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$. Од произволноста на тројката броеви (x_0, y_0, z_0) следува дека

с кое решение на системот $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$ е решение на системот $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$ т.е.

единственото решение е $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$.

Пример 1

За системот од три линеарни равенки со три непознати,

$$2x + y - z = 0$$

$$x - 2z = -3$$

$$5y + z = 2$$

детерминантите се

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14, \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 28$$

Согласно Крамеровите правила имаме $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0, z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2$. Решението на системот е подредената тројка на броеви (1,0,2).

1

Со Крамеровите правила реши го системот од три линеарни равенки со три непознати:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + z = 8 \\ y - 2z = -5 \end{cases}$$

Веќе видовме дека системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \text{ е еквивалентен со системот } \begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases} \text{ . Нека } \Delta = 0 \text{ за системот од три}$$

линеарни равенки со три непознати. Во овој случај се можни два потслучаи:

а) Ако барем една од детерминантите $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ е различна од нула, на пример $\Delta_x \neq 0$,

тогаш во системот $\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x \\ y \cdot \Delta = \Delta_y \\ z \cdot \Delta = \Delta_z \end{cases}$ првата равенка го добива обликот $x \cdot 0 = \Delta_x$ што е

противречност. Од тука следува дека системот од три линеарни равенки со три непознати е противречен.

б) Ако $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ тогаш системот од три линеарни равенки со три непознати има бесконечно многу решенија или е противречен.

Навистина, ако сите коефициенти од една равенка и слободниот член се нули тогаш таа равенка има облик $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$. Значи секоја подредена тројка броеви ќе биде решение на оваа равенка. Тогаш добиваме систем од двете преостанати линеарни равенки со три непознати, кој може да има бесконечно многу решенија или да биде противречен систем. Се добива истата ситуација и ако барем еден од коефициентите во барем една равенка е различен од нула.

 Во системот
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 каде $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ земи $a_1 \neq 0$ и докажи

дека системот има бесконечно многу решенија или е противречен!

Точно е:

Системот од три линеарни равенки со три непознати има или бесконечно многу решенија (неопределен систем) или нема решение (противречен систем) ако $\Delta = 0$.

Согласно до сега кажаното, можеме да ја дадеме следната Крамерова теорема:

Теорема 1 (Крамер): а) Ако детерминантата на системот од три линеарни равенки со три непознати е различна од нула т.е. $\Delta \neq 0$ тогаш тој систем има единствено решение

(определен систем) $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

б) Ако детерминантата на системот е $\Delta = 0$ и $\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0 \vee \Delta_z \neq 0$ тогаш системот нема решение (противречен систем).

в) Ако детерминантата на системот е $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0 \wedge \Delta_y = 0 \wedge \Delta_z = 0$ тогаш системот има бесконечно многу решенија или нема решение (противречен систем).

 Пример 2

а) Даден е системот од три линеарни равенки со три непознати:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ y = -3 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}.$$

Детерминантата на системот е $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, но детерминантата

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0. \text{ Значи, системот е противречен. Навистина со замена на}$$

$y = -3$ во првата и третата равенка на системот, се добива системот $\begin{cases} x - z = 1 \\ x - z = -2 \end{cases}$, кој е противречен систем.

б) Даден е системот од три линеарни равенки со три непознати,

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ y = -1 \\ x - 2y - z = 2 \end{cases}.$$

Детерминантата на системот е $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, но и детерминантите $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Значи, системот има бесконечно многу решенија или е противречен. Доколку во првата и третата равенка од системот земеме за $y = -1$ тогаш го добиваме системот $\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

каде едната равенка е излишна и $z = x$. За $x = t$ добиваме дека $z = t$. Значи, општото решение на овој систем може да се земе подредениот пар $(t, -1, t), t \in \mathbb{R}$ т.е. множеството на решенија на системот е $M = \{(t, -1, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

в) Даден е системот од три линеарни равенки со три непознати:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ 6x + 2y - 6z = 2 \\ 9x + 3y - 9z = 2 \end{cases}.$$

Детерминантата на системот е $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & -6 \\ 9 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 0$, но и детерминантите $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Значи, системот има бесконечно многу решенија или е противречен. Доколку втората равенка ја поделеме со 2 тогаш го добиваме системот $\begin{cases} 3x + y - 3z = -1 \\ 3x + y - 3z = 1 \\ 3(3x + y - 3z) = 2 \end{cases}$, кој е очигледно

противречен систем од три линеарни равенки со три непознати.

Реши ги следните системи од три равенки со три непознати:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x - 2y + 2z = 10; \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -3x + 3y - 3z = 2. \\ x + y - z = -2 \end{cases}$$

Системот од три линеарни равенки со три непознати $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ каде слободните членови се нули се вика **хомоген систем од три линеарна равенки со три непознати**.

Хомогениот систем ги образува детерминантите:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Очигледно е дека од својствата на детерминантите од трет ред се добива $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Согласно Крамеровата теорема ако $\Delta \neq 0$ тогаш системот има единствено решение, а тоа е нултото (тривијално) решение $(0,0,0)$. Овој систем има и ненулта решенија и за овие решенија точна е следната теорема 2:

Теорема 2: Хомоген систем од три линеарни равенки со три непознати има ненулта решенија ако и само ако детерминантата на системот $\Delta = 0$.

Доказ: Нека хомогениот систем од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \text{ има ненулта решение } (x_0, y_0, z_0). \text{ За } \Delta \neq 0 \text{ од Крамеровите правила се}$$

добива замо нултото решение $(0,0,0)$ за хомогениот систем од три линеарни равенки со три непознати и следува противречност на претпоставката дека има ненулта решение. Значи, $\Delta = 0$.

Нека $\Delta = 0$ на хомогениот систем од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases} \text{ Од Крамеровата теорема в) следува дека овој систем има бесконечно}$$

многу решенија или е противречен. Со оглед на тоа што овој систем го има нултото решение следува дека не може да биде противречен систем. Следи дека системот има бесконечно многу решенија. ■

Пример 3 Хомогениот систем од три линеарни равенки со три непознати:

$$\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ y = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

има детерминантата е $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Доколку во првата и третата равенка од

системот земеме за $y = 0$ тогаш го добиваме системот $\begin{cases} 3x - 3z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ каде едната равенка е

излишна и $z = x$. За $x = t$ добиваме дека $z = t$. Значи, општото решение на овој систем може да се земе подредениот пар $(t, 0, t), t \in \mathbb{R}$ т.е. множеството на решенија на системот е $M = \{(t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

4 Најди ги сите решенија на следните хомогени системи од три линеарни равенки со три непознати:

а) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

Дискусија на множеството решенија

Дискусијата на множеството решенија на еден систем од три линеарни равенки со три непознати ќе ја спроведеме со користење на детерминантите и Крамеровата теорема преку пример и задачи, на ист начин како и дискусијата за множеството решенија на систем од две линеарни равенки со две непознати во прва година.

Пример 4 За системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

во однос на параметарот a ќе го дискутираме неговото решение. Детерминантата на

системот е: $\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + 2 - 3a = (a-1)^2(a+2)$. Другите три детерминанти се:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-3)(a-1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(2a-1).$$

Системот има единствено решение кога $\Delta \neq 0$ т.е. $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ и тоа е $x = \frac{a-3}{(a-1)(a+2)}$,

$y = \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)} = z$ т.е. решението е подредената тројка

$$\left(\frac{a-3}{(a-1)(a+2)}, \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)}, \frac{2a-1}{(a-1)(a+2)} \right).$$

Системот нема решение или има бесконечно многу решенија, ако $\Delta = 0$ т.е. $a = 1 \vee a = -2$.

За $a = 1$ детерминантите $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Системот има облик $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ и едната

равенка е излишна. Значи го имаме системот $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ и од првата равенка имаме

$z = 1 - x - y$. Со замена на оваа равенка во втората добиваме $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$ што е противречност. Значи системот е противречен систем т.е. нема решение.

За $a = -2$ детерминантата $\Delta_x = 15 \neq 0$, тогаш системот нема решение.



5

Во зависност од параметарот a , дискутирај го решението на системот

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+4y+z=1 \\ 6x+(a+2)y+2z=1 \end{cases}.$$

Некои системи може воведување на соодветни помошни непознати да се трансформираат во систем од три линеарни равенки со три непознати и така да се решат.

Пример 5 Системот:

$$\begin{cases} \frac{2}{x-z} - \frac{3}{y+2x} + \frac{1}{z} = 9 \\ \frac{1}{x-z} + \frac{2}{y+2x} - \frac{3}{z} = -6 \\ \frac{4}{x-z} - \frac{5}{y+2x} - \frac{2}{z} = 12 \end{cases}$$

со воведување на помошните непознати $u = \frac{1}{x-z}, v = \frac{1}{y+2x}, w = \frac{1}{z}$ се трансформира во

систем од три линеарни равенки со три непознати $\begin{cases} 2u - 3v + w = 9 \\ u + 2v - 3w = -6 \\ 4u - 5v - 2w = 12 \end{cases}$. Овој систем решавајќи

го со Крамеровите правила има решение $(1, -2, 1)$. Се враќаме назад во помошните непознати, каде добиваме нов систем од три линеарни равенки со три непознати

$\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$. Со решавање на овој систем со Крамеровите правила се добива решение

$(2, -\frac{5}{2}, 1)$, кое е воедно и решение на почетниот систем.



Реши го системот

$$\begin{cases} \frac{3}{x+y-z} - \frac{6}{y+x} - \frac{1}{x-z} = 1 \\ \frac{6}{x+y-z} - \frac{4}{y+x} + \frac{1}{x-z} = 3 \\ \frac{15}{x+y-z} + \frac{2}{y+x} + \frac{3}{x-z} = 5 \end{cases}$$

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги следните системи равенки:

$$\begin{aligned} \text{а)} \begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases} & \quad \text{б)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \\ 3x - 5y + 2z = -1 \end{cases} & \quad \text{в)} \begin{cases} x - y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ -5x + 5y - 5z = 5 \end{cases} & \quad \text{г)} \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Реши ги следните хомогени системи од три линеарни равенки со три непознати:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 4z = 0; \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 4z = 0. \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$

3. Во зависност од вредноста на параметарот m дискутирај го решението на системот

$$\text{а) } \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m; \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -4x + 5y - 2z = 1 \\ 2x + y - mz = 1 - 2m \end{cases}.$$

4. Со воведување на замена реши ги следните системи:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} + \frac{1}{z} = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -6; \\ \frac{4}{x} - \frac{5}{y} - \frac{2}{z} = 12 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -\frac{2}{x-2y} + \frac{3}{x+y+z} - \frac{4}{y-z+1} = 1 \\ \frac{1}{y-z+1} + \frac{3}{x-2y} - \frac{1}{x+y+z} = 2. \\ \frac{1}{x-2y} - \frac{4}{x+y+z} + \frac{5}{y-z+1} = -3 \end{cases}.$$

4. Поим за матрица

Да го дефинираме поимот матрици.

Дефиниција 1: Нека $m, n \in \mathbb{N}$ се природни броеви и нека се дадени $m \cdot n$ реални броеви $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, распоредени во m редици и n колони

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

За оваа правоаголна шема велиме дека е **матрица** од облик $m \times n$, или $m \times n$ —**матрица**, а за реалните броеви a_{ij} дека се нејзини елементи.

Матриците вообичаено ги означуваме со големите печатни латинични букви и наместо записот даден во дефиниција 1, кратко матрицата можеме да ја запишеме и со $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Една матрица е напълно определена ако се познати вредностите на нејзините елементи, како и нивните позиции во рамките на таа матрица.

Кога зборуваме за позиција на елементот a_{ij} во матрицата тогаш ќе речеме дека тој се наоѓа во i -тата редица и во j -тата колона т.е. во пресекот на i -тата редица и j -тата колона.

Пример 1

Матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ е од облик 2×3 со 2 редици и 3 колони, а матрицата $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ е од облик 2×4 со 2 редици и 4 колони.

1

Опреди го редот на следните матрици:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 2: За две матрици $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ велме дека се **еднакви** ако се од ист облик $m \times n$ и ако соодветните елементи им се еднакви, т.е. ако $a_{ij} = b_{ij}$ за сите $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Пример 2

Двете матрици $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B$ не се еднакви, иако и двете се од ред 3×2 и се состојат од исти елементи. Но, истите елементи треба да бидат сместени и на соодветните места. Бројот 1 од матрицата A се наоѓа на позиција 1 редица и 1 колона, но во матрицата B се наоѓа на позиција 1 редица и 2 колона.

2

Опреди ги x, y така што двете матрици да бидат еднакви

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & y+1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Дефиниција 3: За матрицата од облик $m \times n$, за која важи дека сите нејзини елементи се еднакви на нула, ќе велиме дека е **нулта** $m \times n$ –матрица и ја означуваме $O_{m,n}$ (или $O_{m \times n}$).

Дефиниција 4: Матрица за која $m=1$ (т.е. е од облик $1 \times n$, што значи дека има само една редица)

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]$$

се нарекува **матрица-редица**, додека матрицата со само една колона (од облик $m \times 1$)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

ја именуваме како **матрица-колона**.

Дефиниција 5: Нека A е $m \times n$ – матрица. Со A^T ќе ја означуваме матрицата добиена со промена на улогите на редиците и колоните на A . За A^T велиме дека е **транспонирана матрица** на матрицата A .

Ако $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ тогаш $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$.

Пример 3

За матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$, нејзината транспонирана матрица е

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

За транспонираната матрица точна е следната теорема 1:

Теорема 1: За произволна матрица A важи $(A^T)^T = A$.

Доказ: Својството следува од дефиницијата 5, ако $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ тогаш $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$. Ако $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ тогаш $(A^T)^T = [a_{ij}]_{m \times n} = A$. ■

3

За матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, провери го равенството $(A^T)^T = A$.

Дефиниција 6: За матрицата за која бројот на редици е еднаков на бројот на колони, т.е. $m=n$, велиме дека е **квадратна матрица** (од ред n). Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ од квадратна матрица $A = [a_{ij}]$ од ред n ја сочинуваат (главната) дијагонала на A . Споредната дијагонала ја сочинуваат елементите $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$.

Дефиниција 7: За матрицата $E_n = [e_{ij}]$ од ред n за кој важи дека $e_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{ако } i = j \\ 0: & \text{ако } i \neq j \end{cases}$ велиме дека е **единечна матрица** од n -ти ред.

Пример 4 а) Матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ е квадратна матрица од ред 3.

Елементите од главната дијагонала се 2,-2,0, а елементите од споредната дијагонала се -4,-2,-4.

б) Единечна матрица од втор ред има облик,

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



а) Дајте пример на квадратна матрица од ред 4 и испишете ги елементите на главната и на споредната дијагонала.

б) Напишете ја единичната матрица од трет ред!

Некои квадратни матрици:

1. Квадратна матрица се нарекува **горнотриаголна матрица** ако сите нејзини елементи „под“ главната дијагонала се еднакви на нула, или попрецизно, тоа е матрица за која $a_{ij} = 0$, за сите $i > j$, т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

2. Квадратна матрица се нарекува **долготриаголна матрица** ако сите нејзини елементи „над“ главната дијагонала се еднакви на нула т.е. тоа е матрица за која важи дека $a_{ij} = 0$, за сите $i < j$ т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Овие два вида матрици со заедничко име се именуваат **триаголни матрици**.

3. Матрицата која истовремено е и долно и горнотриаголна се нарекува **дијагонална матрица** т.е.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

4. Ако сите елементи од дијагоналата кај дијагонална матрица се меѓусебно еднакви,

таквата матрица ќе ја нарекуваме **скаларна матрица** т.е. $a_{ij} = \begin{cases} d: & \text{ако } i = j \\ 0: & \text{ако } i \neq j \end{cases}$

т.е.

$$\begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}.$$

5. Ако $A^T = A$, за A велиме дека е **симетрична матрица**, додека ако $A^T = -A$ тогаш матрицата A се нарекува **кососиметрична (антисиметрична) матрица**.

6. Ако $A^T A = A A^T = E$, тогаш матрицата A се нарекува **ортогонална матрица**.

Пример 5

а) Матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ е горнотриаголна матрица, а матрицата

$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 8 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ е долнотриаголна матрица, додека пак матрицата $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

е дијагонална матрица.

б) Матрицата $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ е скаларна матрица.

в) Матрицата $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ е симетрична матрица, а матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ е кососиметрична матрица.



а) Дај пример на горнотриаголна и пример на долнотриаголна матрица од трет ред !

б) Какви матрици се единичните и нултите квадратни матрици ?

в) Матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ е симетрична или кососиметрична матрица?

Задачи за самостојна работа

1. Дадени се матриците $A = \begin{bmatrix} x-y & 2y \\ 1 & -z-u \\ x-z & z \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} z & u \\ z+u & x \\ y & x-y \end{bmatrix}$. За кои вредности на x, y, z, u , матриците се еднакви?

2. За матрицата $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, определи A^T !

3. Дали постојат a, c во матрицата $A = \begin{bmatrix} a & c \\ a-c & 3 \end{bmatrix}$ за кои $A = A^T$?

4. Какви се следните квадратни матрици:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Операции со матрици

Кај матриците може да се дефинираат одредени операции. Операциите со кои се оперира се: множење на матрица со број, собирање на матрици и множење на матрици.

Множење на матрица со број

Дефиниција 1: Нека $a \in \mathbb{R}$ и $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. **Производ на реален број a со матрица A** е матрица од ист ред како и матрицата A (значи, од ред $m \times n$), ја означуваме со aA , чии елементи се производите на бројот $a \in \mathbb{R}$ со соодветните елементи од A , т.е.

$$aA = [aa_{ij}]_{m \times n}.$$

Пример 1

Производот на реалниот број -2 со квадратната матрицата $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

од ред 2 е матрицата $-2 \cdot A = -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 0 & -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot (-2) & -2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, која е исто така квадратна матрица од ред 2, како и матрицата A .

1 Пресметај: а) $\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 6 & 2 \end{bmatrix}$; б) $6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

За оваа операција точна е теорема 1:

Теорема 1: Нека матриците A и O се од ред $m \times n$ и $a \in \mathbb{R}$. Тогаш точни се следниве својства:

i) $0 \cdot A = O$; **ii)** $a \cdot O = O$; **iii)** $1 \cdot A = A$; **iv)** $(-1) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [-a_{ij}]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$

Доказ: Нека е се дадени произволни $m \times n$ - матрици $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $O = [0]_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

(i) Производот на реалниот број 0 со матрицата A

$$0 \cdot A = 0 \cdot [a_{ij}] = [0 \cdot a_{ij}] = [0] = O$$

е нултата матрица O ,

(ii) Производот на произволен реален број a и нултата матрица O е

$$a \cdot O_{m,n} = a \cdot [0] = [a \cdot 0] = [0] = O_{m,n}$$

е нултата матрица O ,

(iii) Производот на реалниот број 1 и матрица A е

$$1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}] = [1 \cdot a_{ij}] = [a_{ij}] = A$$

е матрица A .

(iv) Производот на реалниот број -1 и матрица A е

$$-1 \cdot A = -1 \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [-1 \cdot a_{ij}] = [-a_{ij}]_{m \times n} \quad \blacksquare$$

Дефиниција 2: За матрицата $(-1)A$ ќе велиме дека е **спротивна** на матрицата A и ќе ја означуваме со $-A$.

Пример 2

На матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, спротивна е матрицата $-A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$



Запиши ги спротивните матрици на матриците:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Собирање на матрици

Операцијата собирање на матрици е дефинирана во следната дефиниција 3:

Дефиниција 3: Нека $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, каде $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Збир на матриците A и B е $m \times n$ - матрицата чии елементи се збирите на соодветните елементи од A и B , т.е. елементите кои се на иста позиција:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Согласно дефиницијата 3 можеме да заклучиме дека се собираат само матрици од ист ред. Додека пак одземањето на две матрици се спроведува преку собирање на првата матрица (прв собиор) со спротивната матрица на втората матрица (втор собиор) која учествува во процесот на собирање т.е. $A - B = A + (-B)$.

Пример 3

За квадратните матрици $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ од ред 2 со 2 редици

и колони, нивниот збир е:

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3 & 2+(-3) \\ -3+3 & 0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix},$$

т.е. квадратна матрица од ист ред 2, како и двете матрици A и B , кои ги собираме:



3

Пресметај $A+B$ и $B+A$ за матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Што забележуваш?

Теорема 2: Нека матриците A, B, C и O се од ред $m \times n$ и $a, b \in \mathbb{R}$. Тогаш точни се следниве својства:

- | | | |
|---------------------|------------------------|------------------------|
| 1) $A+B=B+A$; | 2) $A+(B+C)=(A+B)+C$; | 3) $A+O=A$; |
| 4) $A+(-A)=O$; | 5) $(a+b)A=aA+bA$; | 6) $(ab)A=a(bA)$; |
| 7) $a(A+B)=aA+aB$; | 8) $(aA)^T=aA^T$; | 9) $(A+B)^T=A^T+B^T$. |

Доказ: Нека се дадени матриците $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ од ред $m \times n$ и $a, b \in \mathbb{R}$.

1) Со примена на комутативниот закон за собирање на реални броеви, се покажува дека е точен комутативниот закон за собирање на матрици,

$$A+B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = [b_{ij}]_{m \times n} + [a_{ij}]_{m \times n} = B+A.$$

2) Со користење на асоцијативниот закон за собирање на реални броеви, се покажува дека е точен асоцијативниот закон за собирање на матрици,

$$\begin{aligned} (A+B)+C &= ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) + [c_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} + ([b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n}) = A+(B+C). \end{aligned}$$

3) Збирот на матрицата A и нултата матрица O ни ја дава повторно матрица A т.е

$$A+O = [a_{ij}]_{m \times n} + [0]_{m \times n} = [a_{ij} + 0]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A.$$

4) Збирот на матрицата A и нејзината спротивна матрицата ни ја дава нултата матрица O т.е.

$$A+(-A) = [a_{ij}]_{m \times n} + [-a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + (-a_{ij})]_{m \times n} = [0]_{m \times n} = O.$$

5) За произволни реални броеви a, b и произволна матрицата A , со примена на дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето кај реални броеви имаме:

$$\begin{aligned} (a+b)A &= (a+b) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [(a+b) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij} + b \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [b \cdot a_{ij}]_{m \times n} = \\ &= a \cdot [a_{ij}]_{m \times n} + b \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = a \cdot A + b \cdot A. \end{aligned}$$

6) За произволни реални броеви a, b и произволна матрицата A , со примена на асоцијативен закон на множењето кај реални броеви имаме:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot A &= (a \cdot b) \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [(a \cdot b) \cdot a_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot (b \cdot a_{ij})]_{m \times n} = a \cdot [b \cdot a_{ij}]_{m \times n} \\ &= a \cdot (b \cdot [a_{ij}])_{m \times n} = a \cdot (b \cdot A) \end{aligned}$$

7) За произволен реален број a и произволни матрици A и B , со примена на дистрибутивен закон на множењето во однос на собирањето кај реални броеви имаме:

$$a \cdot (A+B) = a \cdot ([a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n}) = a \cdot [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [a \cdot (a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [a \cdot a_{ij}]_{m \times n} + [a \cdot b_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= a \cdot \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} + a \cdot \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = a \cdot A + a \cdot B.$$

8) За произволен реален број a и произволна матрицата A , од $aA = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$ добиваме:

$$(aA)^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}, \text{ но точно е и } aA^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}. \text{ Следува } (aA)^T = \begin{bmatrix} a \cdot a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m} = aA^T.$$

9) За произволни матрици A и B , согласно дефинициите за собирање на матрици и транспонирана матрица, точно е $A^T = \begin{bmatrix} a_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$, $B^T = \begin{bmatrix} b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$,

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} + \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n},$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}, A^T + B^T = \begin{bmatrix} a_{ji} + b_{ji} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Следува, $(A + B)^T = A^T + B^T$. ■

Пример 4

За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ матрицата $3A - 2B$ го има обликот

$$3A - 2B = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4

За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ и реални броеви 2 и -5 провери ги својствата

од теорема 2.

Множење на матрици

За множење на две матрици ја даваме следната дефиниција 4:

Дефиниција 4: Нека $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ и $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{n \times k}$, $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k$. Под производ на матриците A и B ќе ја подразбираме матрицата $A \cdot B = C$ при што $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{m \times k}$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, k$. и

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k.$$

Од дефиницијата јасно е дека се множат само матрици за кои важи дека бројот на колони на првата матрица (прв множител) е еднаков на бројот на редови на втората матрица (втор множител) и така што секој елемент c_{ij} (значи елементот чија позиција е во

пресекот на i -тата редица и j -тата колона) од матрицата-производ се добива со множење на елементите од i -тата редица на првата матрица со соодветните елементи од j -тата колона на втората матрица и потоа производите се собираат.

Пример 5 За квадратната матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$ од ред 2 со 2 редици и 2 колони и матрицата $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ од ред 2×3 со 2 редици и 3 колони, нивниот производ е матрица C од ред 2×3 со 2 редици и 3 колони. Операцијата множење се спроведува според правилото дадено подолу,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -9 & 13 & -2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = C$$

- 1 редица со 1 колона: $1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$ - елементот a_{11} во матрицата C ;
- 1 редица со 2 колона: $1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 2$ - елементот a_{12} во матрицата C ;
- 1 редица со 3 колона: $1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1$ - елементот a_{13} во матрицата C ;
- 2 редица со 1 колона: $2 \cdot 0 + (-3) \cdot 3 = -9$ - елементот a_{21} во матрицата C ;
- 2 редица со 2 колона: $2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) = 13$ - елементот a_{22} во матрицата C ;
- 2 редица со 3 колона: $2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 = -2$ - елементот a_{23} во матрицата C .

5 Определи ја матрицата $C = A \cdot B$, за матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$.

За множењето на матрици ќе ја дадеме следната теорема 3, без доказ:

Теорема 3: Нека $a \in \mathbb{R}$. Тогаш точни се следниве својства:

- 1) $a(AB) = (aA)B = A(aB)$, за $m \times n$ матрица A и $n \times k$ матрица B ;
- 2) $A(BC) = (AB)C$, за $m \times n$ матрица A , $n \times k$ матрица B и $k \times l$ матрица C (асоцијативен закон);
- 3) $A(B+C) = AB+AC$, за $m \times n$ матрица A , $n \times k$ матрици B и C (лев дистрибутивен закон);
 $(A+B)C = AC+BC$, за $m \times n$ матрици A и B , $n \times k$ матрица C (десен дистрибутивен закон);
- 4) $(AB)^T = B^T A^T$, за $m \times n$ матрица A , $n \times k$ матрица B .

Доказот се прави едноставно со користење на дефиницијата за производ на матрици и својствата на операциите со реални броеви.

6 Пресметај AB и BA : а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$. Дали $AB = BA$?

Во општ случај не важи комутативниот закон за множење на матрици т.е. $AB \neq BA$.

7 За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ и реалниот број 6, провери ги својствата од теорема 3.

Степен на матрица

Со користење на операцијата множење на матрици ќе дефинираме степен на матрица.

За квадратната матрица A производот $A \cdot A$ и накратко го означуваме со A^2 т.е. $A \cdot A = A^2$

За производот $A \cdot A \cdot A = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A$ кратко пишуваме A^3 т.е. $A \cdot A \cdot A = A^3$ итн.

Дефиниција 5: За секоја квадратна матрица A може да се дефинира A^n , **степен** на A (при што n е ненегативен цел број) со: $A^0 = E$, $A^1 = A$ и индуктивно, $A^n = A^{n-1} \cdot A$, за $n > 1$.

Во степенот $A^0 = E$, E е единечна матрица од исти ред како и матрицата A .

8 За дадените матрици: а) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ пресметај A^2 и A^3

Дефиниција 6: Ако $A^2 = E$, тогаш A се нарекува **инволуторна матрица**.

Дефиниција 7: Ако $A^2 = A$, тогаш A се нарекува **идемпотентна матрица**.

9 Провери дали матриците A и B се инволуторни или идемпотентни или ниту едното, ниту другото.

Задачи за самостојна работа

1. За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

пресметај:

а) $5A - 3B + 4C$; б) $(-2A)^T + (3B - 4C)^T$; в) $5C^T - 3A^T + 4B^T$.

2. За матриците дадени во Задача 1 провери дали е точно:

а) $(A + B) + C = A + (B + C)$; б) $A + C = C + A$!

3. За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ пресметај:

а) $5A - 3BC$; б) $A^T \cdot (3B - 4C)$; в) $(AC)^T - (3BC)^T$.

4. За матриците дадени во задача 3 провери дали е точно:

а) $BC = CB$; б) $A \cdot (C + B) = AC + AB$; в) $(AC)B = A(CB)$!

5. Кои од следните матрици $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ и

$D = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ можат да се помножат? Пресметај ги производите кои постојат! Потоа

најди B^2 и D^3 !

6. Провери кои од следните матрици се инволуторни, а кои идемпотетни:

а) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; в) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Инверзбилна и инверзна матрица

Во овој дел ќе разгледуваме квадратни матрици.

Најпрво ќе го воведеме поимот детерминанта на квадратна матрица.

За квадратната матрица $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, детерминантата е:

$$\det A = \det \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За детерминантите на две квадратни матрици A и B важи: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Пред да го воведеме поимот на несингуларна (инверзибилна, инвертибилна) матрица обиди се да ја решиш следната задача.

1 За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, пресметај AB и BA !

Дефиниција 1: За квадратната матрица A велиме дека е **инверзибилна (несингуларна, инвертибилна) матрица**, ако постои квадратна матрица B од ист ред како и A , таква што $AB = BA = E$.

Точна е следната теорема 1:

Теорема 1: За инверзибилна (несингуларна, инвертибилна) матрица A нејзината инверзна матрицата A^{-1} е еднозначно определена.

Доказ: Нека A е несингуларна (инверзибилна) матрица. Тогаш таа има инверзна матрица. Нека за матрицата A постојат две инверзни матрици B и C . Следува $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Значи, $B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$. ■

Ако матрицата не е несингуларна, тогаш таа се нарекува **сингуларна матрица**.

Пример 1 а) Сингуларна матрица е нултата матрица.

б) Единичната матрица е несингуларна (таа е инверзна сама на себе) т.е. $E = E^{-1}$, бидејќи $EE = E$. Провери!

в) За матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ќе ја најдеме инверзната матрица $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ со равенството

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2z & y+2u \\ x+3z & y+3u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Добиваме $\begin{cases} x+2z=1 \\ y+2u=0 \\ x+3z=0 \\ y+3u=1 \end{cases}$, од каде $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=-1 \\ u=1 \end{cases}$. По проверката

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E, \quad A^{-1}A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E,$$

се добива дека $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Инверзна матрица на матрица од втор ред. Инверзната матрица на матрица од втор ред ја добиваме на ист начин како во пример 1, в). За матрицата $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ќе ја најдеме инверзната

матрица $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ со равенството

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bz & ay+bu \\ cx+dz & cy+du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Добиваме $\begin{cases} ax+bz=1 \\ ay+bu=0 \\ cx+dz=0 \\ cy+du=1 \end{cases}$, од каде $\begin{cases} x = \frac{d}{ad-bc} \\ y = -\frac{b}{ad-bc} \\ z = -\frac{c}{ad-bc} \\ u = \frac{a}{ad-bc} \end{cases}$. Додека пак, $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$.

Од овде инверзната матрица на матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ќе го има следниот облик

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Можеме да заклучиме дека за да постои A^{-1} , потребно и доволно е $\det A \neq 0$.

Пример 2

За матрицата $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ детерминанта е $\det B = 2 \neq 0$. Значи, постои инверзна матрица на матрицата B . Инверзната матрица е

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

2

Најди ја инверзната матрица на матрицата $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$.

Инверзна матрица на матрица од трет ред. Да ја формираме матрицата чии што елементи се

еднакви на соодветните алгебарски компленти на A . Значи, нека $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ е

квадратна матрица од ред 3 и нека $A^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & a_{13}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & a_{23}^* \\ a_{31}^* & a_{32}^* & a_{33}^* \end{bmatrix}$. Вака добиената матрица составена од

алгебарски компленти $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ на соодветните елементи a_{ij} од матрицата A се нарекува **реципрочна** матрица на матрицата A . За нејзината транспонирана ќе велиме дека е **адјунгирана** матрица на матрицата A и ја означуваме со $\text{adj}A = (A^*)^T$.

Следуваат две теореми, кои ќе ни дадат критериум за несингуларност на една квадратна матрица и формула за пресметување на инверзна матрица.

Теорема 1: За секоја квадратна матрица A важи $A \cdot \text{adj}A = \text{adj}A \cdot A = (\det A) \cdot E$.

Теорема 2: Квадратна матрица A е несингуларна матрица ако и само ако $\det A \neq 0$. Во таков случај, инверзната матрица ја наоѓаме со

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}A$$

Значи, ако е дадена квадратна матрица A , за да пресметаме A^{-1} , најпрво ја пресметуваме $\det A$ и ако таа е различна од нула, тогаш A има инверзна и тоа е матрицата чии што елементи се еднакви на соодветните елементи од нејзината адјунгирана матрица поделени со вредноста на детерминантата на A .

3

Докажи го равенството $A \cdot \text{adj}A = \text{adj}A \cdot A = (\det A) \cdot E$!

Пример 3

За матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ детерминанта е $\det A = 2 \neq 0$. Значи,

постои инверзна матрица на матрицата A . За реципрочната матрица имаме:

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad a_{12}^* = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad a_{13}^* = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$a_{21}^* = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad a_{22}^* = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad a_{23}^* = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad a_{32}^* = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2, \quad a_{33}^* = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Нејзината реципрочна матрица е $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Инверзната матрица е $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.



Најди ја инверзната матрица на $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$, ако постои.

Теорема 3: Нека A и B се две несингуларни (инверзибилни) матрици од исти ред. Тогаш точни се следните својства:

1) $A = (A^{-1})^{-1}$;

2) Постои $(AB)^{-1}$, при што $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Доказ: Нека A и B се две несингуларни (инверзибилни) матрици од исти ред.

1) $A = AE = A(A^{-1}(A^{-1})^{-1}) = (AA^{-1})(A^{-1})^{-1} = E(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.

2) Матриците A и B се несингуларни и точно е $\det A \neq 0, \det B \neq 0$. Нормално, постои и AB $\det AB = \det A \cdot \det B \neq 0$ (матрицата AB е инверзибилна), значи постои $(AB)^{-1}$. Имаме,

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

Следува, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■



Нека се дадени матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Провери дали матриците се несингуларни! Потоа, провери ги својствата 1) и 2) од теорема 3.

Задачи за самостојна работа

1. Да се определат инверзните матрици за матриците:

а) $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; в) $C = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

2. Да се определат инверзните матрици за матриците:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } C = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. За матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ провери го равенството $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$!

4. За матрицата $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ провери го равенството $A = (A^{-1})^{-1}$!

7. Решавање на матрични равенки

Досега имате решавано различни алгебарски равенки. Овде ќе се запознаеме со т.н. матрични равенки. Матричните равенки се равенки во кои непознатата е матрица. Во првиот чекор се решава матричната равенка преку изразување на непозната матрица, најчесто обележана со X , а вториот чекор се оперира со матриците со запазување на нивните својства. Во продолжение ќе дадеме примери на матрични равенки, каде матриците $A, B, C, \dots$ се квадратни од втор или трет ред и играат улога на познати матрици, а матрицата X е непозната квадратна матрица. Важно е дека не важи комутативен закон за множење на две произволни квадратни матрици A, B , па поради тоа кога множиме равенство со матрици, ќе нагласиме дали множиме од лево или од десно.

Пример 1

Кај следните матрични равенки ќе ја изразиме матрицата X .

$$\text{а) } A \cdot X = B / \cdot A^{-1} \text{ од лево} \quad \text{б) } X \cdot A = B / \cdot A^{-1} \text{ од десно}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$$

$$EX = A^{-1}B$$

$$XE = B \cdot A^{-1}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$

$$\text{в) } A \cdot X \cdot B = C / \cdot A^{-1} \text{ од лево}$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$EX \cdot B = A^{-1} \cdot C$$

$$X \cdot B = A^{-1} \cdot C / \cdot B^{-1} \text{ од десно}$$

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$XE = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}$$

Очигледно е дека при решавање на матрична равенка потребно е да се пресмета и инверзна матрица.

Пример 2

За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ во матричната

равенка $BX = A + E$, ќе ја најдеме матрицата X на следниот начин:

$$BX = A + E / \cdot B^{-1} \text{ од лево}$$

$$B^{-1} \cdot BX = B^{-1} (A + E)$$

$$EX = B^{-1} (A + E)$$

$$X = B^{-1} (A + E).$$

Потоа, ја наоѓаме инверзната матрица B^{-1} на матрицата B т.е.

$$B^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix}$$

Од овде,

$$\begin{aligned} X = B^{-1} (A + E) &= -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ X &= -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 6 & -15 & 25 \\ -10 & -23 & -45 \\ 38 & 1 & 99 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1

Реши ги матричните равенки по X :

а) $A \cdot X = B$; б) $X \cdot A = B$; в) $A \cdot X \cdot B = C$; г) $CX = A - B$;

за матриците $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

2

Реши ги матричните равенки по X :

а) $A \cdot X = B$; б) $X \cdot A = B$; в) $A \cdot X \cdot B = C$; г) $CX = A - B$;

за матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Да дадеме уште неколку посложени матрични равенки, каде користиме и замена.

Пример 3

а) Од матричната равенка $A \cdot X - B = X + E$, ја изразуваме матрицата X

$$A \cdot X - X = B + E$$

$$\underbrace{(A - E)}_C X = B + E$$

$$CX = B + E / \cdot C^{-1} \text{ од лево}$$

$$X = C^{-1}(B + E)$$

$$X = (A - E)^{-1}(B + E)$$

б) Од матричната равенка $XB + C = X + A$, ја изразуваме матрицата X

$$XB - X = A - C$$

$$X \underbrace{(B - E)}_D = A - C$$

$$XD = A - C / \cdot D^{-1} \text{ од десно}$$

$$X = (A - C)D^{-1}$$

$$X = (A - C)(B - E)^{-1}$$

в) Од матричната равенка $X^{-1}A(B + E)^{-1} = B^{-1}$, ја изразуваме матрицата X

$$X^{-1}A(B + E)^{-1} = B^{-1} / \cdot X \text{ од лево}$$

$$XX^{-1}A(B + E)^{-1} = XB^{-1}$$

$$A(B + E)^{-1} = XB^{-1} / \cdot B \text{ од десно}$$

$$A(B + E)^{-1}B = X$$

$$X = A(B + E)^{-1}B$$

За матриците $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ пресметај ја матрицата X во секоја од матричните равенки под а), б) и в) во пример 3.

3

Реши ги матричните равенки по X :

а) $(A - 2E)(X + E) = A$ ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $(XA^{-1})^{-1} = X^{-1} + B$ ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$.

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги матричните равенки по X за дадените квадратни матрици од втор ред:

а) $X^{-1}AB = B^{-1}A^{-1}$ ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix};$

б) $AX^{-1} + B = CX^{-1}$ ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$

2. Реши ги матричните равенки по X за дадените квадратни матрици од трет ред:

а) $(B+E)^{-1}AX^{-1} = A^{-1}$ ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$

б) $(B+3E)(X-E) = A$ ако $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$

8. Решавање на систем од три линеарни равенки со три непознати

Систем од три линеарни равенки со три непознати веќе видовме дека можеме да го решиме со помош на Крамеровите правила. Таков систем може да го решиме со помош на матрична равенка и со помош на Гаусов метод на елиминација. Во продолжение ќе го објасниме решавањето со матрична равенка, а решавањето со Гаусов метод на елиминација ќе го оставиме за наредната наставна единица.

Нека е даден систем од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}.$$

Врз основа на овој систем, ги формираме следниве матрици:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

Тогаш системот може да се запише во т.н. матрична форма:

$$AX = B.$$

Навистина, ако го пресметаме производот AX , за така формираните матрици и го изедначиме со B , го добиваме дадениот систем равенки.

За матрицата A веламе дека е матрица на системот. Да претпоставиме дека таа е несингуларна ($\det A \neq 0$). Тогаш за матричната равенка $AX=B$ веќе видовме дека се сведува на $X=A^{-1}B$, т.е. користејќи ја формулата за наоѓање на инверзна матрица се добива непозната матрица

$$X = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \cdot B.$$

Забелешка: Матричната равенка за решавање на системи се користи само кога матрицата на системот е несингуларна матрица.

Пример 1

Да го решиме системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

со матрична равенка $AX=B$. Матрицата на системот $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ и матрицата-

редици $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Инверзната матрица на матрицата A е

$$A^{-1} = -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -6 & -2 & -4 \\ -7 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Матрицата $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Решението на системот е подредена тројка броеви $(1, -1, 1)$.



Со помош на матрична равенка реши ги следните системи од три равенки со три непознати:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2; \\ x - y + z = 3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2z = -3 \\ 5y + z = 2 \end{cases}.$$

Задачи за самостојна работа

Реши ги следните системи со матрична равенка:

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}; \quad 2. \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0 \\ 3x - y = 7 \end{cases}; \quad 3. \begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8 \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}; \quad 4. \begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x + y + 2z = 5 \\ -3x + 3y - 4z = 8 \end{cases}.$$

9. Гаусов метод на елиминација

Елементарни трансформации кои се применуваат на системи од две линеарни равенки со две променливи изучени во прва година се применуваат и на системи од три линеарни равенки со три променливи за добивање на еквивалентни системи. Тие се:

- а) замена на местата на равенките;
- б) множење на една од равенките со ненулта број;
- в) на една равенка и се додава друга равенка помножена со некој ненулта број.

Нека ни е даден систем од три линеарни равенки со три непознати во нормален (општ) облик:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Суштината на Гаусовиот метод за решавање на систем од три линеарни равенки со три непознати се состои од манипулирање на системот т.ш. равенките се множат со одредени броеви и се додаваат на другите останати равенки со цел да се изгубат одредени непознати и да се дојде до решение за една непозната. Потоа, се враќаме наназад за да ги најдеме вредностите на останатите непознати. Манипулирањето со системот го правиме со елементарни трансформации.

Пример 1

За решавање на системот од три линеарни равенки со три непознати

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - 5z = -2 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

да го презентираме Гаусовиот метод:

1) Првата равенка ја множиме со -2 и ја додаваме на втората равенка, но првата ја множиме и со -1 и ја додаваме на третата равенка,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y-5z=-2 / R_1(-2)+R_2 \\ x-y+z=3 / R_1(-1)+R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-7z=-4 \\ -2y=2 \end{cases}$$

Ја елиминиравме непозната x од првата и третата равенка. Но, ја елиминиравме и z од третата равенка.

2) третата равенка ја делиме со -2 и го добиваме решението за y ,

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-7z=-4 \\ -2y=2 / :(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ -3y-7z=-4 \\ y=-1 \end{cases}$$

3) Се заменува вредноста на y во првата и втората равенка и втората равенка ја делиме со -7 и се добива вредноста на непозната z :

$$\begin{cases} x+z=2 \\ -7z=-7 / :(-7) \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=2 \\ z=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

4) Се заменува вредноста на непозната z во првата равенка и се добива вредноста на непозната x :

$$\begin{cases} x+z=2 \\ z=1 \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Решението на системот е (1,-1,1).

Доколку дадениот систем од три линеарни равенки со три непознати не е во нормален (општ) облик, за да го примениме Гаусовиот метод, потребно е да го доведеме системот во нормален облик.



Со Гаусов метод да се решат следните системи од три линеарни равенки со три непознати:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x-y+z=8 \\ x+2y=0 \\ 3x-y=7 \end{cases} ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+2y-5z=6 \\ -2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{cases}$$

Со Гаусов метод на елиминација треба може да се утврди дали даден систем има бесконечно многу решенија или е контрадикторен.

Пример 2

а) Системот $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 16 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases}$ го решаваме со Гаусовиот метод на

елиминација:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 16 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 5x + y + z = 16 / R_1(-5) + R_2 \\ 3x - y + z = 2 / R_1(-3) + R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 16y - 4z = 76 / : 4 \\ 8y - 2z = 38 / : 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 19 \\ 4y - z = 19 \end{cases}$$

Во последниот систем е очигледно дека третата равенка е излишна и системот има бесконечно многу решенија т.е за $y=t, t \in \mathbb{R}$ се добива $z=4t-19, x=7-t$. Множеството решенија е $M = \{(7-t, t, 4t-19) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

б) Системот $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 8 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases}$ го решаваме со Гаусовиот метод на елиминација,

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 5x + y + z = 8 \\ x - 3y + z = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 5x + y + z = 8 / R_1(-5) + R_2 \\ 3x - y + z = 2 / R_1(-3) + R_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 16y - 4z = 68 / : 4 \\ 8y - 2z = 38 / : 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 17 \\ 4y - z = 19 / R_2(-1) + R_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + z = -12 \\ 4y - z = 17 \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2 \end{cases}$$

Последната равенка од системот е противречна равенка. Значи, системот е противречен систем.

2

Со Гаусов метод да се решат следните системи од три линеарни равенки со три непознати:

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 4x - 2y + 2z = 6; \\ 6x - 3y + 3z = 9 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 2y - 5z = 6 \\ -2x - 4y + 10z = 8. \\ 3x + 6y - 4z = 8 \end{cases}$

Задачи за самостојна работа

Со Гаусов метод да се решат следните системи од три линеарни равенки со три непознати:

1. $\begin{cases} 2x - 3y + z = -9 \\ 5x + y - 2z = 12; \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y = 0; \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 4x + y - 2z = 8; \\ 2x + 3y + 5z = 5 \end{cases}$

$$4. \begin{cases} x+2y-5z=6 \\ -2x+y+2z=5 \\ -3x+3y-4z=8 \end{cases}; \quad 5. \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=3 \\ 3x-5y+2z=-1 \end{cases}; \quad 6. \begin{cases} x-y+z=-1 \\ x+y-z=2 \\ -5x+5y-5z=5 \end{cases}.$$

10. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Пресметај ги следниве детерминанти:

$$а) \begin{vmatrix} a & a+b \\ a-b & a \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Користејќи ги својствата на детерминантите докажи:

$$а) \begin{vmatrix} a+bx & a+bx & c \\ d+ex & d+ex & f \\ g+hx & g+hx & m \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 1 & p & qw \\ 1 & q & wp \\ 1 & w & pq \end{vmatrix} = (q-p)(w-p)(w-q).$$

3. Со помош на Крамеровите правила да се реши системот
$$\begin{cases} x-2y+z=-1 \\ -2x+y-3z=0 \\ 3x-2y+z=2 \end{cases}.$$

4. Нека се дадени матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Пресметај: а) $3C-4B$; б) A^3 ; в) $-2BC$; г) A^{-1} ; д) C^{-1} .

5. Определи ја непознатата матрица X од следните равенства:

$$а) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad б) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

6. Нека A и B се две несингуларни матрици од ист ред и нека $AB=BA$. Докажи дека $AB^{-1}=B^{-1}A$ и $A^{-1}B=BA^{-1}$!

7. За матриците $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ најди ја непознатата матрица X од матричната равенка $XA^{-1}B=A^{-1}+E$.

8. Реши го системот $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -3x + 4y - 2z = 1 \\ 5x + y + 4z = -3 \end{cases}$ со:

а) матрична равенка; б) Гаусов метод на елиминација.

9. Дискусирај го решението на следните системи во зависност од параметрите:

а) $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1; \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax + ay + (a+1)z = a \\ ax + ay + (a-1)z = a \\ (a+1)x + ay + (2a+3)z = 1 \end{cases}$.

10. Реши ги следните системи:

а) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 4x + 2y + 2z = 5; \\ 6x + 3y + 3z = 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 4x + 4y + 4z = 16; \\ 2x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0; \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0; \\ -x - z = 0 \end{cases}$ д) $\begin{cases} \frac{2}{x-2y} - \frac{3}{y+2z} + \frac{1}{2x-z+y} = 0 \\ -\frac{3}{x-2y} + \frac{4}{y+2z} - \frac{2}{2x-z+y} = 1; \\ \frac{5}{x-2y} + \frac{1}{y+2z} + \frac{4}{2x-z+y} = -3 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 2y = 2. \\ -x - z = 3 \end{cases}$

**Модуларна единица 4 – Аналитичка геометрија во простор
(за сите останати струки)**

Аналитичката геометрија е област од математиката во која геометријата се изучува со користење на алгебрата. Во аналитичката геометрија, геометриските фигури се разгледуваат во дводимензионален и тродимензионален Декартов правоаголен координатен систем, претставувајќи ги аналитички т.е. со алгебарски равенки. За основоположник на аналитичката геометрија се смета францускиот математичар Рене Декарт (1596-1650) со неговото дело „Геометрија“. Во едно од трите додатоци на „Расправа за методите“ (1637), ја дава примената на неговата општа метода на синтеза помеѓу геометријата и алгебрата. Сепак, од писмата на францускиот математичар Пјер Де Ферма (1601-1665) се гледа идејата за аналитичката геометрија уште пред објавување на делото на Декарт. Како и да е, појавата на аналитичката геометрија се смета за почеток на модерната математика.

Во оваа модулarna единица, прво ќе се потсетиме за производите помеѓу вектори, кои се веќе изучени во трета година: скаларен, векторски и мешан производ на вектори. После ќе направиме проширување на веќе изучената Аналитичка геометрија во рамнина во Аналитичка геометрија во простор.

1. Скаларен производ на вектори

Во овој дел ќе се потсетиме за скаларен производ помеѓу два вектора. Но, пред скаларен производ на вектори да се потсетиме на некои основни дефиниции поврзани со поимот вектор, координати на вектор и точка во правоаголен тродимензионален Декартов координатен систем.

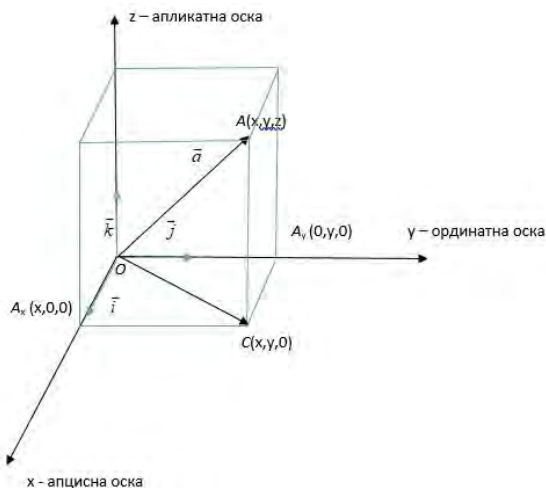
Дефиниција 1: Вектор е отсечка за која се знае која од нејзините крајни точки е почеток, а која завршеток (крај). Секој вектор е зададен со три елементи: должина, правец и насока.

Дефиниција 2: Колинеарни вектори ќе ги викаме векторите кои лежат на иста права или на паралелни прави.

Дефиниција 3: Компланарни вектори ќе ги викаме векторите кои нанесени во една точка лежат во иста рамнина.

Правоаголен координатен систем (просторен) е определен со фиксна точка O , и на неа прикачени три заемно нормални и еднакви по должина вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Нивната должина ја избираме за единична мерка $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$. Овие вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ се познати под името **ортови** или **базни вектори (единечни вектори)**.

Радиус-векторот $\vec{a}$ е вектор чиј почеток е координатниот почеток O на просторниот правоаголен координатен систем, а крајна точка е произволна точка A . Координатите на радиус-векторот $\vec{a}$ и координатите на неговата крајна точка A се исти, слика 1.



Слика 1

Произволен радиус-вектор $\vec{a}$ може да се претстави (еднозначно) во облик $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$.

Координатната форма на радиус-вектор $\vec{a} = (x, y, z)$, значи дека на секој вектор му придружуваме подредена тројка на реални броеви. Неговата крајна точка $A(x, y, z)$ ја има истата координатна форма. Значи, координати на точка се координати и на нејзиниот радиус-вектор.

За векторите дадени во координатни форми $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ се дефинираат операциите: собирање на вектори во координатна форма со $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$ и множење на вектор во координатна форма со реален број $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Координатната форма на произволен вектор $\overrightarrow{AB}$ определен со: $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$, каде почетната точка е $A(a_1, a_2, a_3)$ и крајната точка е $B(b_1, b_2, b_3)$.

Координатите на точката $M(x, y, z)$ која лежи на правата AB определена со точки $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ и ја дели отсечката AB во однос λ се наоѓаат по формулите:

$$x = \frac{a_1 + \lambda b_1}{1 + \lambda}, y = \frac{a_2 + \lambda b_2}{1 + \lambda}, z = \frac{a_3 + \lambda b_3}{1 + \lambda}.$$

Специјално, координатите на точката $M(x, y, z)$ која е средина на отсечката AB се пресметуваат по формулите:

$$x = \frac{a_1 + b_1}{2}, y = \frac{a_2 + b_2}{2}, z = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Да поминеме на дефинирање на скаларен производ на два вектора:

Дефиниција 4: Скаларен производ на два вектори $\vec{a}, \vec{b}$ е бројот $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, каде што α е аголот меѓу векторите $\vec{a}, \vec{b}$, а $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ се должини на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соодветно.

Пример 1

За двата вектори $\vec{a}, \vec{b}$ со интензитети (модули) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4$ и агол помеѓу нив $\alpha = 30^\circ$ скаларниот производ е

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ = 20 \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}.$$



Пресметај го скаларниот производ на векторите $\vec{a}, \vec{b}$ со интензитети $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6$ и агол помеѓу нив $\alpha = 150^\circ$!

Од Дефиниција 4 очигледно е дека скаларниот производ помеѓу два вектора може да биде:

- позитивен број, ако аголот помеѓу векторите е остар;
- негативен број, ако аголот помеѓу векторите е тап.

Да се потсетиме и на својствата на скаларен производ и на неговата примена.

Теорема 1: За произволни вектори $\vec{a}, \vec{b}$ точно е,

$$1^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp \vec{b}; \quad \text{т.е. } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

$$2^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Теорема 2: За скаларниот производ на произволни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и произволен скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ точни се следниве својства:

$$1^0 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$2^0 \quad \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b});$$

$$3^0 \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Теорема 3: За два ненулти вектори $\vec{a}, \vec{b}$ точно е $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$, каде α е аголот меѓу нив.

Пример 2

Скаларниот производ на векторите $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ каде $|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 2$ и аголот $\alpha = \sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$ со користење на својствата на скаларниот производ на векторите е:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (4\vec{p} - 3\vec{q}) \cdot (5\vec{p} + 2\vec{q}) = 20|\vec{p}|^2 + 8\vec{p} \cdot \vec{q} - 15\vec{q} \cdot \vec{p} - 6|\vec{q}|^2 \\ &= 20|\vec{p}|^2 + 8\vec{p} \cdot \vec{q} - 15\vec{p} \cdot \vec{q} - 6|\vec{q}|^2 = 20|\vec{p}|^2 - 7\vec{p} \cdot \vec{q} - 6|\vec{q}|^2 \\ &= 20 \cdot 4^2 - 7|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \alpha - 6 \cdot 2^2 = 320 - 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 24 \\ &= 320 - 28 - 24 = 268 \end{aligned}$$

2

Пресметај го скаларниот производ на векторите $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, ако $|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ и агол помеѓу нив $\alpha = 120^\circ$!

Пример 3

За да го најдеме аголот β помеѓу векторите $\vec{a}, \vec{b}$ од пример 2, ќе ја искористиме формулата во теорема 3, $\cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$.

Скаларниот производ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 268$ е веќе пресметан, но да ги пресметаме модулите на векторите со користење на Теорема 1, 2⁰

$$\begin{aligned}
|\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} = (4\vec{p} - 3\vec{q})^2 = 16|\vec{p}|^2 - 24\vec{p} \cdot \vec{q} + 9|\vec{q}|^2 = 16 \cdot 4^2 - 24|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \alpha + 9 \cdot 2^2 \\
&= 256 - 24 \cdot 4 + 36 = 232 \\
|\vec{b}|^2 &= \vec{b} \cdot \vec{b} = (5\vec{p} + 2\vec{q})^2 = 25|\vec{p}|^2 + 20\vec{p} \cdot \vec{q} + 4|\vec{q}|^2 = 25 \cdot 4^2 + 20|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \alpha + 4 \cdot 2^2 \\
&= 400 + 20 \cdot 4 + 16 = 496
\end{aligned}$$

Значи,

$$\cos \beta = \frac{268}{\sqrt{232} \cdot \sqrt{496}} = \frac{268}{2\sqrt{58} \cdot 4\sqrt{31}} \approx 0,79 \Rightarrow \beta \approx 37,81^\circ.$$

3 Пресметај го аголот β помеѓу векторите $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, ако $|\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2$ и агол аголот $\alpha = \angle(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$!

За ортовите согласно слика 1, точно е:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$$

За координатната форма на скаларен производ веќе знаеме дека се точни следните својства:

Теорема 4: Скаларен производ на вектори дадени во координатна форма $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ е бројот $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Теорема 5: За кои било вектори $\vec{a}, \vec{b}$ точно е,

(1) должина на вектор: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

(2) агол меѓу два вектори: $\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$;

(3) услов за нормалност (ортогоналност) на два вектори $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$,
 $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$.

Со помош на координатната форма на скаларен производ, ние можеме да го најдеме и растојанието d меѓу две точки $A(x_1, x_2, x_3), B(y_1, y_2, y_3)$. Веќе знаеме дека векторот $\overrightarrow{AB}$ има координатна форма $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$. Растојанието помеѓу овие две точки е

$$d = \overline{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Пример 4

а) За векторите $\vec{a} = (3, 2, -3)$, $\vec{b} = (7, 0, -5)$, кои се дадени во координатна форма скаларниот производ е $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-5) = 21 + 15 = 36$. Додека пак, аголот α помеѓу нив е

$$\cos \alpha = \frac{36}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + (-5)^2}} = \frac{36}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{74}} = 0,89 \Rightarrow \alpha = 27,13^\circ.$$

б) Должината на векторот $\vec{a} = (0, -3, 2)$ даден во координатна форма е:

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}.$$

в) За точките $A(2, -3, 1)$, $B(-2, 3, -4)$, нивното растојание е:

$$d = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 + 3)^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-9)^2 + (-5)^2} = \sqrt{122}.$$

4

а) Пресметај го скаларниот производ и аголот α помеѓу векторите $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-4, 2, -3)$ дадени во координатна форма!

б) Пресметај ја должината на векторот $\vec{a} = (-1, 5, -2)$!

в) Пресметај го растојанието помеѓу точките $A(1, -2, -1)$, $B(5, -6, 0)$.

5

Провери дали векторите $\vec{a} = (5, -2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2)$ може да бидат страни на квадрат.

Задачи за самостојна работа

- Пресметај: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$; в) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot 5\vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2$ и аголот помеѓу нив е $\alpha = \frac{\pi}{6}$.
- Пресметај го скаларниот производ на векторите $\vec{a} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - 3\vec{q}$, ако $|\vec{p}| = 8, |\vec{q}| = 1$ и аголот помеѓу векторите $\vec{p}, \vec{q}$ е $\alpha = \frac{\pi}{3}$! Потоа, најди го аголот помеѓу векторите $\vec{a}, \vec{b}$!
- За кои и да било вектори $\vec{a}, \vec{b}$, докажи дека:
 - $(2\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + \vec{b}) = 4|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$; б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- Докажи: Дијагоналите на ромбот се меѓу себе нормални!
- За векторите $\vec{a} = (1, -2, -3)$, $\vec{b} = (2, 0, -5)$ пресметај!
 - $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $|\vec{a}|, |\vec{b}|$; в) аголот α помеѓу нив.
 Дали се ортогонални векторите $\vec{a}, \vec{b}$?

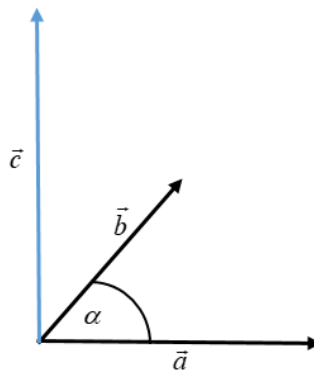
6. Дадени се темиња на $\triangle ABC$ / $A(3, -2, 1), B(-1, -2, 4), C(-4, -2, 0)$ / . Најди:
- а) внатрешниот агол на триаголникот кај темето C;
 - б) должината на тежишната линија на триаголникот спуштена кон страната $\overline{AB}$.
7. При даден вектор $\vec{a} = (3, -2, 1)$ најди ги координатите на векторот $\vec{x}$ кој лежи на yz -рамнина ако $\vec{a} \perp \vec{x}, |\vec{x}| = 3\sqrt{5}$.

2. Векторски производ на вектори

Да се потсетиме на дефиницијата за векторски производ на два вектора.

Дефиниција 1: Векторски производ на неколинеарни вектори $\vec{a}, \vec{b}$ го викаме векторот $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ (слика 2) т.ш.

- правецот на векторот $\vec{c}$ е нормален на рамнината во која лежат $\vec{a}, \vec{b}$;
- векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ образуваат десна тројка на вектори;
- интезитетот (модулот) на векторот $\vec{c}$ е $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$, каде аголот α е аголот помеѓу векторите $\vec{a}, \vec{b}$.



Слика 2

Ознака, која се користи за означување на векторски производ освен $\vec{a} \times \vec{b}$ е и $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Пример 1

За два вектора $\vec{a}, \vec{b}$ со интензитет $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4$ и агол помеѓу нив $\alpha = \frac{\pi}{3}$ модулот на векторот $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ е

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha = 1 \cdot 4 \cdot \sin \frac{\pi}{3} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

1

Пресметај го модулот на векторскиот производ на векторите $\vec{a}, \vec{b}$ со модули $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6$ и агол помеѓу нив $\alpha = 120^\circ$!

Да се потсетиме на својствата на векторски производ и неговата примена.

Теорема 1: За векторскиот производ на произволни вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и произволен скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ точни се следниве својства:

$$1^0 \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|;$$

$$2^0 \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a}, \vec{b} \text{ се колинеарни};$$

$$3^0 \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$$

$$4^0 \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b});$$

$$5^0 \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Теорема 2: Плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}, \vec{b}$ е

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Последица: Плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a}, \vec{b}$ е

$$P = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Теорема 3: Координатна форма на векторски производ за два вектори

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ е } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 2

Модулот на векторскиот производ на векторите $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ каде $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 2$ и агол $\alpha = \sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = 60^\circ$ го пресметуваме на следниот начин:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (4\vec{p} - 3\vec{q}) \times (5\vec{p} + 2\vec{q}) = 20\vec{p} \times \vec{p} + 8\vec{p} \times \vec{q} - 15\vec{q} \times \vec{p} - 6\vec{q} \times \vec{q} \\ &= 8\vec{p} \times \vec{q} + 15\vec{p} \times \vec{q} = 25\vec{p} \times \vec{q}\end{aligned}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 25 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \sin \alpha = 25 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = 100\sqrt{3}.$$

2

Пресметај го модулот на векторскиот производ на векторите $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, ако $|\vec{p}| = 7$, $|\vec{q}| = 2$ и агол $\alpha = \sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = 120^\circ$!

Пример 3

а) За векторите $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, -1, 0)$, кои се дадени во координатна форма, векторскиот производ е векторот

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{k} = (0, 0, -1).$$

б) Плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (0, -1, 0)$ е

$$P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2} = 1 \text{ квадратна единица.}$$

3

Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$ со темиња $A(3, 2, -5)$, $B(1, -4, 3)$, $C(-3, 1, 0)$.
Потоа, пресметај ја должината на висината на триаголникот спуштена кон страната $\overline{BC}$.

Задачи за самостојна работа

- Пресметај: а) $|\vec{a} \times \vec{b}|$; б) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$; в) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times 5\vec{b}$, ако $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ и агол помеѓу нив $\alpha = 45^\circ$!
- Пресметај $|\vec{a} \times \vec{b}|$ на векторите $\vec{a}, \vec{b}$ со модул $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$!
- Пресметај ја плоштината на триаголникот конструиран над векторите $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}$, каде векторите $\vec{p}, \vec{q}$ имаат модули $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$ и агол $\alpha = \sphericalangle(\vec{p}, \vec{q}) = 30^\circ$!
- За кои и да било вектори $\vec{a}, \vec{b}$, докажи дека:
 - $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b}) = 4\vec{a} \times \vec{b}$;
 - $2\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{b}$.
- За векторите $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (-1, 0, 3)$ пресметај:
 - $\vec{a} \times \vec{b}$;
 - $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;
 - $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times 5\vec{b}$!

6. Пресметај ја висината на паралелограмот $ABCD$ зададен со координатите на темињата $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(2, 5, -6)$, $D(4, 2, -3)$.
7. Пресметај го $\sin \alpha$ за агол помеѓу векторите $\vec{a} = (2, 3, -5)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$.

3. Мешан производ на вектори

Да се потсетиме на уште еден производ, но производ помеѓу три вектори.

Дефиниција 1: Мешан производ на три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ го викаме скаларот $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Мешаниот производ ја има ознаката $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Да се потсетиме и на неколку теореми поврзани со мешаниот производ на вектори и неговата приемена.

Теорема 1: Волуменот на паралелопипедот конструиран од векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Знакот на мешаниот производ е позитивен, ако векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуваат десна тројка вектори. Додека пак, знакот на мешаниот производ е негативен, ако векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуваат лева тројка вектори.

Последица: Волуменот на тетраедар конструиран над векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ е

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Теорема 2: За кои било вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ точно е $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ ако и само ако векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ се компланарни.

Теорема 3: За кои било вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, координатната форма на мешаниот производ е дадена со формулата,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot c_1 - \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \cdot c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 1

Мешаниот производ на десната тројка вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, каде векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, кои пак зафаќаат агол од 30° при $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 1$ е:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})) \cdot |\vec{c}| \cos \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = 6 \cdot 5 \sin 30^\circ \cdot 1 \cdot 1 = 15.$$

Десна тројка вектори значи дека векторите $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}$ се истонасочни.

1

а) Пресметај го мешаниот производ на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ако тие се заемно нормални и образуваат десна тројка вектори со модули $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2$.

б) Пресметај го волуменот на квадар со основни рабови $a = 7, b = 3, c = 5$!

Пример 2

а) За векторите $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$, мешаниот производ е

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 2 = -6.$$

б) За векторите $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$, волуменот на паралелопипедот конструиран над овие три вектори е $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$. Мешаниот производ $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -6$. Следува дека $V = |-6| = 6$ кубни единици.

в) Волуменот на тетраедарот конструиран над истите тие три вектори $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (-2, -3, 0), \vec{c} = (0, 1, 1)$ е $V = \frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$ кубна единица.

2

а) Пресметај го волуменот на тетраедарот конструиран над векторите $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (3, 4, -2), \vec{c} = (-2, 0, 4)$.

б) Пресметај го волуменот на тетраедарот со темиња $A(1, 2, 1), B(3, 4, -2), C(-2, 0, 4), S(1, 2, 3)$.

Пример 3

Векторите $\vec{a} = (2, 3, -1), \vec{b} = (1, -1, 3), \vec{c} = (1, 9, -11)$ се компланарни бидејќи нивниот мешан производ е нула т.е.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 22 - 9 + 9 - 1 - 54 + 33 = 55 - 55 = 0.$$

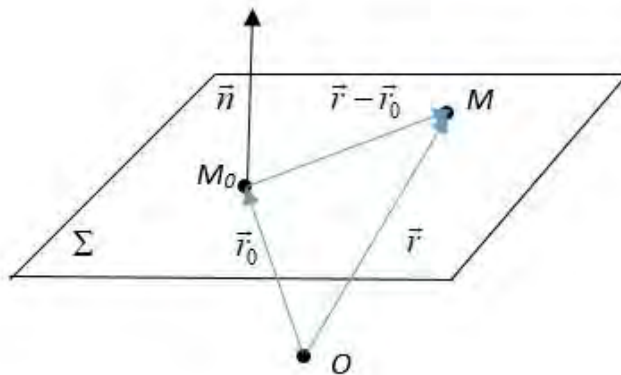
Провери дали над векторите $\vec{a} = (2, 1, 1), \vec{b} = (1, -2, 3), \vec{c} = (-2, 1, -1)$ може да се конструира паралелопипед!

Задачи за самостојна работа

1. За кои било вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ точни се следните равенства $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}), (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$. Докажи !
2. Докажи $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$!
3. Пресметај го мешаниот производ на десната тројка вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ако векторот $\vec{c}$ е нормален на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, кои пак зафаќаат агол од 45° меѓу себе, со модули $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 2$.
4. Пресметај го волуменот на коцка со основен раб $|\vec{a}| = 7$ со примена на вектори.
5. Пресметај ја висината на паралелопипедот конструиран над векторите $\vec{a} = (-1, 0, 1), \vec{b} = (-3, 4, -2), \vec{c} = (-2, 1, 0)$.
6. Нека волуменот на тетраедарот со темиња на основата $A(1, 2, 1), B(3, 4, -2), C(-2, 0, 4)$ е 15 кубни единици. Најди ги координатите на врвот, ако се знае дека врвот лежи на x -оската!
7. Пресметај ја вредноста на параметарот m , ако векторите $\vec{a} = (m, 0, 1), \vec{b} = (-2, 4, 1), \vec{c} = (-2, m, 0)$ се компланарни.

4. Општ облик на равенка на рамнина

Нека $Oxyz$ е Декартов правоаголен координатен систем во простор. Најпрво ќе ја одредиме равенката на рамнината Σ која е определена со една нејзина точка и ненулти вектор нормален на рамнината.



Слика 3

Ако е дадена точка M_0 и ненулти вектор $\vec{n}$, тогаш постои еднозначно определена рамнина која минува низ дадената точка M_0 и е нормална на дадениот вектор $\vec{n}$. Нека точката M_0 е определена со радиус-векторот $\vec{r}_0$, слика 3. Нека е дадена произволна точка M од рамнината Σ определена со радиус-векторот $\vec{r}$. Со движење на точката M во рамнината Σ се менува и векторот $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, но сепак тој секогаш останува нормален на $\vec{n}$ (бидејќи $\overrightarrow{M_0M}$ лежи во рамнината Σ) т.е. $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M}$. Скаларниот производ на два заемно нормални вектори е 0, т.е. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ односно $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$. Овој услов го задоволува секоја точка M од рамнината Σ , а ако M не лежи на рамнината Σ , тој услов е нарушен. Според тоа, со него се искажува својството на припадност на точките на рамнината.

Затоа природно е, овој услов да го земеме како равенка на рамнина Σ во векторска форма.

Дефиниција 1: Равенката

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$$

каде векторот $\vec{n} \perp \Sigma$, $\vec{r}_0$ е радиус - векторот на точката M_0 и $\vec{r}$ е радиус-вектор на точката M се вика **векторска равенка на рамнината Σ** .

Точките $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$, векторот $\vec{n} = (A, B, C)$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, радиус-векторите $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ и векторот $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ имаат свои координатни форми.

Векторската равенка $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ на рамнината Σ има и аналитички израз, т.е. **координатна форма** од облик $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Дефиниција 2: Равенката на рамнина од облик

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

се нарекува **скаларна равенка на рамнина која минува низ една точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$** и е нормална на **даден вектор $\vec{n} = (A, B, C)$** .

Пример 1

Да ја напишеме равенката на рамнината Σ што минува низ точката $M_0(1, 3, -5)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = (-2, 5, 1)$. Согласно равенката $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ имаме $-2(x - 1) + 5(y - 3) + 1(z + 5) = 0$. Последното равенство можеме да го трансформираме во облик $2x - 5y - z + 8 = 0$, кое можеме да го сметаме за равенка на рамнината Σ .



Најди ја равенката на рамнината Σ што минува низ точката $A(5, -3, 7)$ и е нормална на векторот $\vec{n} = (7, -8, 10)$.

Координатната форма на равенката на рамнината можеме да ја трансформираме во следниот облик.

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

каде што $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Дефиниција 3: Равенката

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

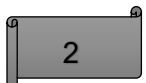
се нарекува **општ облик на равенка на рамнина** со вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ нормален на неа.

Во општата равенка на рамнина, коефициентите A, B, C и D се реални броеви. Значи, некој од нив може да биде еднаков на нула и да добиеме специјални случаи на рамнината во однос на нејзината местоположба во правоаголниот Декартов координатен систем:

1. Ако $D = 0$ тогаш општата равенка на рамнина го има обликот $Ax + By + Cz = 0$. Тоа значи дека $x = 0, y = 0, z = 0$ е едно нејзино решение, па имаме дека во овој случај рамнината минува низ координатниот почеток.

2. Ако $A = 0$ тогаш општата равенка на рамнина го има обликот $By + Cz + D = 0$. Тоа е рамнина нормална на векторот $\vec{n} = (0, B, C)$. Но, векторот $\vec{n} = (0, B, C)$ е нормален на ортот $\vec{i} = (1, 0, 0)$, значи оваа рамнина е паралелна со x -оската. Ако дополнително и $D = 0$, општата равенка на рамнина е од облик $By + Cz = 0$. Оваа рамнина е паралелна со x -оската и го содржи координатниот почеток. Со други зборови, тоа е точно онаа рамнина која ја содржи x -оската.

3. Ако $A = B = 0$ тогаш општата равенка на рамнина го има обликот $Cz + D = 0$. Ова е рамнина нормална на векторот $\vec{n} = (0, 0, C)$, кој е колинеарен со ортот $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Значи, тоа е равенка на рамнина, паралелна на рамнината образувана од x -оската и y -оската. Специјално, ако при ваквиот случај важи дека и $D = 0$, тогаш ја добиваме равенката на рамнината со облик $z = 0$, која ја претставува равенката на координатната рамнина Oxy .



Дискутирај ги случаите $Ax + Cz + D = 0$, $Ax + D = 0$, $Ax + By + D = 0$, и $x = 0, y = 0$.

Од веќе дискутираното може да заклучиме дека:

Ако некој од коефициентите A , B или C е нула, тогаш рамнината е паралелна со координатната оска која е „соодветна“ на тој коефициент;
 Ако точно еден од тие коефициенти не е нула, тогаш рамнината е нормална со соодветната оска, т.е. е паралелна со координатната рамнина определена со другите две оски.

Пример 2

Рамнината со равенка $2x - z + 5 = 0$ е паралелна со y - оската, а рамнината $6z - 7 = 0$ е нормална со z - оската т.е. паралелна со Oxy рамнината.

3

Каква е положбата на рамнините зададени со следните равенки:

- а) $x + y = 0$; б) $2x + y - z = 0$; в) $-2y + 3z = 4$?

Задачи за самостојна работа

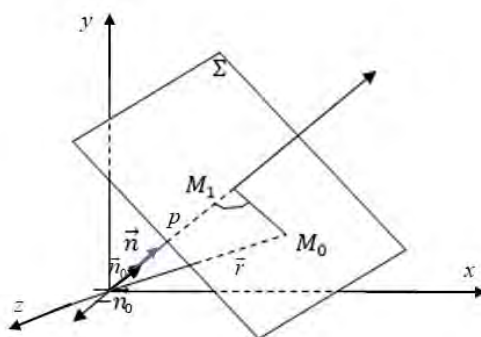
- Најди ја равенката на рамнината Σ што минува низ точката $B(8, 3, -4)$ и вектор $\vec{n} = (5, 2, -3)$ нормален на неа. Потоа, провери дали точките $P(7, 5, 4)$, $Q(1, 0, 2)$, $R(0, 29, 0)$ лежат на Σ .
- Дадени се две точки во просторот $A(-2, -1, -3)$, $B(0, 3, -5)$. Најди ја равенката на рамнината Σ со нормален вектор $\vec{n} = (1, 0, -3)$ што минува низ средината на отсечката AB .
- Каква е положбата на рамнините зададени со следните равенки:
 а) $x - 2y + z = 0$; б) $3x + y = 2$; в) $3x - 4z = 0$; г) $x = 0$;
 д) $y - z - 2 = 0$?
- Најди ја општата равенка на рамнината Σ која минува низ точката $A(5, 0, -3)$ и е паралелна со Oyz - рамнина.
- Најди ја општата равенка на рамнината Σ која минува низ точката $B(-1, 3, -3)$ и низ y - оската.

5. Нормален облик на равенка на рамнина

Нека е дадена рамнина Σ со вектор $\vec{n} \perp \Sigma$ (нормалниот вектор е насочен од координатниот почеток кон рамнината) и со произволна точка M_0 на која одговара радиус-вектор $\vec{r}$, која е на растојание $p > 0$ од координатниот почеток O во правоаголен Декартов координатен систем во простор, слика 4. Тогаш единечниот вектор што одговара на векторот $\vec{n}$ е $\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$. Растојанието p од координатниот почеток O до рамнината Σ , очигледно е

проектијата на радиус-векторот $\vec{r}$ врз единечниот вектор $\vec{n}_0$ т.е. $p = \text{pr}_{\vec{n}_0} \vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}_0}{|\vec{n}_0|} = \vec{r} \cdot \vec{n}_0$.

Од овде се добива равенката $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$.



Слика 4

Дефиниција 1: Равенката

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$$

се вика **нормален векторски облик на равенка** на рамнина Σ каде $\vec{n}_0 \perp \Sigma$ е единечен вектор и p е растојанието на рамнината од координатниот почеток.

Јасно е дека за рамнина Σ што минува низ координатниот почеток $p = 0$.

За координатните форми на векторите $\vec{r} = (x, y, z)$ и $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, каде што α, β и γ се аглиите на векторот $\vec{n}_0$ со координатните оски Ox, Oy и Oz соодветно, нормалниот векторски облик на равенка на рамнина $\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - p = 0$ се трансформира во облик

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0.$$

Дефиниција 2: Равенката

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

е **нормален облик на равенка на рамнината** Σ , каде α, β и γ се агли на единичниот вектор $\vec{n}_0$ со координатните оски Ox, Oy и Oz соодветно и p е растојанието на рамнината од координатниот почеток.

Пример 1

Да го напишеме нормалниот векторски облик на равенката на рамнината која е паралелна на рамнината $x - y + 3z - 5 = 0$ и е на растојание 7 од координатниот почеток. Векторот кој е нормален со дадената рамнина $x - y + 3z - 5 = 0$ е нормален и на рамнината чија равенка се бара и тоа е $\vec{n} = (1, -1, 3)$. Единичниот вектор ќе биде

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11} \right) \text{ и } p = 7. \text{ Тогаш равенката во нормален векторски облик би}$$

$$\text{била } \vec{r} \cdot \left(\frac{\sqrt{11}}{11}, -\frac{\sqrt{11}}{11}, \frac{3\sqrt{11}}{11} \right) - 7 = 0.$$

1

Напиши нормален векторски облик на равенка на рамнина која е нормална на вектор $\vec{n} = (1, 2, 3)$ и минува низ координатниот почеток O .

Имајќи предвид дека на нормалата од една рамнина постојат два меѓусебно спротивни ортови, $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и $-\vec{n}_0 = (\cos(\pi - \alpha), \cos(\pi - \beta), \cos(\pi - \gamma))$, согласно слика 4, добиваме дека постојат два нормални облици на равенка на рамнината Σ , при што множејќи со (-1) се преминува од едната во другата равенка.

Така, ако Σ е определена со својата општа равенка $Ax + By + Cz + D = 0$, тогаш нејзиниот **нормален облик** е даден со равенката

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

каде $\vec{n} = (A, B, C)$ е вектор на нормалата со должина $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Знакот пред квадратниот корен во именителот се избира да биде спротивен од знакот пред слободниот член D во општиот облик на равенката на рамнина, за да се обезбеди единичниот вектор да биде насочен од координатниот почеток O кон рамнината.

Пример 2

а) Во нормалниот облик на равенката на рамнина $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 5 = 0$ единечниот вектор нормален на рамнината е $\vec{n}_0 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ и растојанието од координатниот почеток е $p = 5$.

б) Рамнината дадена во општ облик $4x - 5y - z - 1 = 0$ има нормален облик $\frac{2\sqrt{42}}{21}x - \frac{5\sqrt{42}}{42}y - \frac{\sqrt{42}}{42}z - \frac{\sqrt{42}}{42} = 0$, каде единечниот вектор нормален на рамнината е $\vec{n}_0 = (\frac{2\sqrt{42}}{21}, -\frac{5\sqrt{42}}{42}, -\frac{\sqrt{42}}{42})$ и растојанието од координатниот почеток е $p = \frac{\sqrt{42}}{42}$.

2

Следните равенки на рамнини зададени во општ облик претстави ги во нормален облик: а) $2x + 3y - 2z + 3 = 0$; б) $x - y + 3z - 5 = 0$.

Задачи за самостојна работа

1. Напиши нормален векторски облик на равенка на рамнина која е:
 - а) нормална со векторот $\vec{n} = (1, 2, -2)$ и е на растојание 10 од координатниот почеток;
 - б) нормална со векторот $\vec{n} = (-4, -4, 2)$ и е на растојание 4 од координатниот почеток.
2. Напиши нормален векторски облик на равенка на рамнина која е паралелна со рамнината $x - 2y + 2z - 15 = 0$ и е на растојание 5 од координатниот почеток.
3. Напиши нормален векторски облик на равенка на рамнина која е паралелна на рамнината која минува низ три нелинеарни точки $A(1, 2, 3), B(-2, 5, -4), C(0, -1, 5)$ и минува низ координатниот почеток O .
4. Следните равенки на рамнини зададени во општ облик претстави ги во нормален облик:
 - а) $2x + y - 2z + 6 = 0$; б) $x - 2y + 3z - 2 = 0$.
5. Која рамнина е претставена во нормален облик:
 - а) $5x + y - z + 3 = 0$; б) $\frac{2}{3}x + 3y - \frac{2}{5}z - 4 = 0$; в) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{1}{2} = 0$.
6. Во следните равенки на рамнини дадени во нормален облик, најди го растојанието од координатниот почеток и нивниот нормален вектор:
 - а) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - \frac{5}{6} = 0$; б) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 3 = 0$.

6. Сегментен облик на равенка на рамнина

Нека е даден општ облик равенка на рамнина $\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$, каде сите коефициенти се различни од нула т.е. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$. Тогаш равенката можеме да ја презапишеме во облик

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

т.е.

$$\frac{\frac{x}{-D}}{-\frac{A}{D}} + \frac{\frac{y}{-D}}{-\frac{B}{D}} + \frac{\frac{z}{-D}}{-\frac{C}{D}} = 1.$$

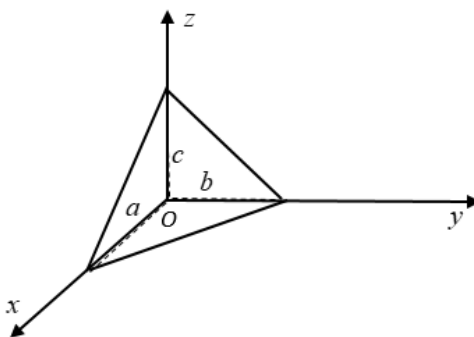
Ако земеме $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$ се добива $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Дефиниција 1: Равенката

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

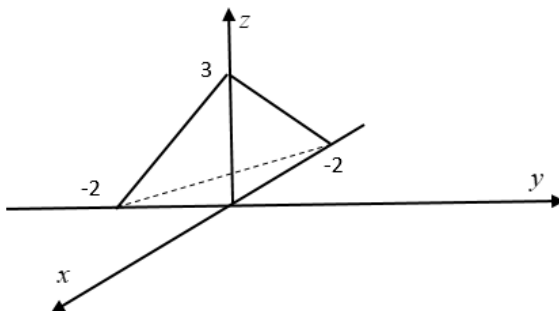
се нарекува **сегментен облик на равенка на рамнина**.

Поимот „сегментен“ доаѓа од ненултите сегменти (делови) a, b и c , кои геометриски ги претставуваат сегментите што на координатните оски Ox, Oy и Oz ги отсекува дадената рамнина, слика 5.



Слика 5

Овие сегменти можат да бидат и негативни. На слика 6 е даден случај каде сегментот на апцисната и ординатната оска е негативен број т.е. $a = b = -2$.



Слика 6

Веќе видовме дека сегментен облик на равенка на рамнина се добива со трансформација на општиот облик на равенка на рамнината и истото ќе го презентираме со следниот пример 1.

Пример 1

Нека е дадена една рамнина во општ облик

$$5x - 3y + z - 15 = 0,$$

каде $A = 5 \neq 0, B = -3 \neq 0, C = 1 \neq 0, D = -15 \neq 0$. Постапката на трансформација во сегментен облик е следнава:

$$5x - 3y + z - 15 = 0$$

$$5x - 3y + z = 15 \quad / : 15$$

$$\frac{5x}{15} - \frac{3y}{15} + \frac{z}{15} = 1$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{5} + \frac{z}{15} = 1.$$



Претстави ги равенките на следните рамнини во сегментен облик:

а) $3x - 4y + 3z + 7 = 0$; б) $4x - 3y - 6z + 12 = 0$.

Нека е дадена равенка на една рамнина Σ во сегментен облик $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$. Трансформацијата од сегментен во општ облик на рамнината Σ е:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad / \cdot abc$$

$$bcx + acy + abz = abc$$

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

$$\text{т.е. } Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$\text{каде } A = bc, B = ac, C = ab, D = -abc.$$

2

Претстави ги равенките на следните рамнини во општ облик:

$$\text{а) } \frac{x}{4} - \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1; \quad \text{б) } \frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{4} - \frac{z}{\frac{3}{4}} = 1.$$

Пример 2

Нека е дадена равенка на рамнината $\Sigma: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1$ во сегментен облик со сегменти $a=2, b=3, c=-1$. Да ја трансформираме равенката во општ облик.

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z &= 1/ \cdot 6 \\ 3x + 2y - 6z &= 6 \\ 3x + 2y - 6z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

каде $A=3, B=2, C=-6, D=-6$.

Пример 3

Да составиме равенка на рамнина Σ која минува низ точките $A(2,1,-5)$ и $B(-2,0,3)$, а на координатните оски x и z отсекува еднакви сегменти. Значи, $a=c$. Тогаш сегментниот облик на нејзината равенка ќе биде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1.$$

Точката $A \in \Sigma$ т.е. нејзините координати го задоволуваат сегментниот облик на равенката:

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} + \frac{1}{b} - \frac{5}{a} &= 1/ \cdot ab \\ 2b + a - 5b &= ab \\ a - 3b &= ab. \end{aligned}$$

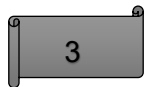
Точката $B \in \Sigma$ т.е. нејзините координати го задоволуваат сегментниот облик на равенката:

$$\begin{aligned} \frac{-2}{a} + \frac{0}{b} + \frac{3}{a} &= 1/ \cdot a \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Го решаваме системот

$$\begin{cases} a - 3b = ab \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3b = b \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = 1 \end{cases}.$$

Сегментниот облик на равенка на рамнината Σ е: $\frac{x}{1} + \frac{y}{\frac{1}{4}} + \frac{z}{1} = 1$.



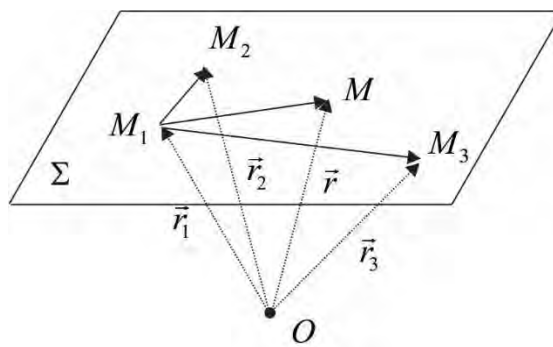
Напиши ја равенката на рамнината која минува низ точката $A(8, -3, 2)$ и на координатните оски отсекува еднакви сегменти.

Задачи за самостојна работа

- Одреди ги сегментите што ги отсекуваат следните рамнини на координатните оски:
а) $2x - 3y - 5z - 20 = 0$; б) $7x + 5y + 4z + 15 = 0$.
- Напиши равенка на рамнина која на координатните оски отсекува сегменти $a = -2, b = \frac{1}{3}, c = 1$.
- а) Напиши равенка на рамнина која минува низ точката $A(1, 2, 3)$ и на координатните оски отсекува еднакви сегменти.
б) Напиши равенка на рамнина која минува низ точките $A(1, 2, 3)$ и $B(-1, -2, 4)$ на координатните оски y и z отсекува еднакви сегменти.
- Опреди го параметарот m во равенката на рамнината $(2 - m)x - 3y - 5z - 15 = 0$ т.ш. збирот на сегментите кои ги отсекува рамнината на координатните оски е 7.
- Опреди го параметарот m во равенката на рамнината $(2m - 3)x - 3my + 2z - 10 = 0$ т.ш. производот на сегментите кои ги отсекува рамнината на координатните оски x и z е 2.
- Опреди го параметарот m во равенката на рамнината $(1 - m)x + 2y + 5z - 20 = 0$ т.ш. производот на сегментите кои ги отсекува рамнината на координатните оски е 100.
- Пресметај го волуменот на тетраедерот образуван од координатните рамнини и рамнината $2x - 10y + 5z - 30 = 0$.

7. Равенка на рамнина низ три точки

Нека се дадени три неколинеарни точки M_1, M_2 и M_3 . Нека радиус-векторите на дадените точки M_1, M_2 и M_3 , кои лежат на рамнината Σ ги означиме со $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ соодветно, а радиус-векторот на произволна точка M го означиме со $\vec{r}$, слика 7. Векторите $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ лежат во рамнината Σ , значи тие се компланарни вектори, па нивниот мешан производ е нула, $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$.



Слика 7

Дефиниција 1: Равенството

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

претставува **векторската форма на равенка на рамнина која минува низ три неколинеарни точки.**

Ако неколинеарните точки кои што лежат на рамнината ги изразиме преку координатите $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ тогаш и нивните радиус-вектори ќе ги имаат истите координати $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, соодветно. Координатната форма на произволната точка од рамнината е $M(x, y, z)$ и нејзиниот радиус-вектор е $\vec{r} = (x, y, z)$. Векторите $\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ се дадени со координатите

$$\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1 = (x - x_1, y - y_1, z - z_1), \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) .$$

Тогаш векторската равенка на рамнина која минува низ три неколинеарни точки во координатна форма е:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

при што $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Дефиниција 2: Равенката:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

се вика **равенка на рамнина** што минува низ три неколинеарни точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Пример 1

Равенката на рамнината што минува низ трите неколинеарни

точки $M_1(0, -1, 2)$, $M_2(1, -2, -1)$ и $M_3(3, 1, 0)$ е

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y + 1 & z - 2 \\ 1 - 0 & -2 + 1 & -1 - 2 \\ 3 - 0 & 1 + 1 & 0 - 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y + 1 & z - 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Со решавање на детерминанта од трет ред се добива

$$2x - 9(y + 1) + 2(z - 2) + 3(z - 2) + 6x + 2(y + 1) = 0$$

$$8x - 7(y - 2) + 5(z - 3) = 0$$

$$8x - 7y + 5z - 1 = 0.$$

Општата равенка на оваа рамнина е

$$8x - 7y + 5z - 1 = 0.$$



Напиши ја равенката на рамнината што минува низ трите неколинеарни точки $M_1(1, -1, -3)$, $M_2(-1, 2, 0)$ и $M_3(-5, -2, 1)$.

Задачи за самостојна работа

1. Напиши ја равенката на рамнината што минува низ трите точки

а) $M_1(0, 1, -3)$, $M_2(1, 2, 0)$, $M_3(-1, -2, 1)$;

б) $M_1(-2, 4, -10)$, $M_2(1, 4, 5)$, $M_3(0, 2, 0)$.

2. Провери дали точките

а) $A(1, 2, -3)$, $B(3, 2, 2)$, $C(4, 5, 1)$, $D(-4, -3, 1)$;

б) $A(0,1,-2), B(1,0,-1), C(1,1,0), D(2,-1,0)$

се компланарни ! Во случај на потврден одговор, најди ја равенката на таа рамнина!

3. Напиши ја равенката на рамнина во која лежи $\triangle ABC / A(1,2,0), B(3,0,-3), C(5,2,6)$. Дали некоја од точките $M(-1,2,3), N(2,1,-3), S(0,-2,1)$ лежи на таа рамнина?

8. Заемен однос на две рамнини

Во однос на меѓусебната положба на две рамнини, тие можат да бидат паралелни меѓу себе (да се совпаѓаат или да немаат заеднички точки) или да се сечат.

Нека се дадени две рамнини во општ облик:

$$\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

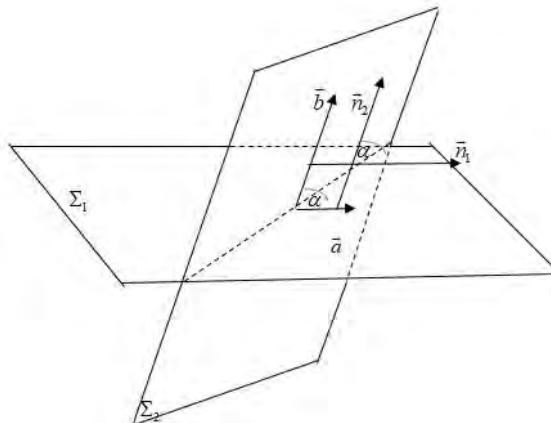
$$\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Векторите, кои се нормални на двете рамнини се:

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{n}_1 \perp \Sigma_1 \text{ и } \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2), \vec{n}_2 \perp \Sigma_2.$$

Агол меѓу рамнините. Кога двете рамнини се сечат тогаш тие образуваат агол $\alpha = \angle(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Овој агол е всушност аголот помеѓу нивните нормални вектори, $\alpha = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$. За аголот меѓу двете рамнини го сметаме помалиот од двата агли α и $\pi - \alpha$.

Нека за помал агол го земеме аголот α како аголот меѓу $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, слика 8.



Слика 8

Аголот α можеме да го пресметаме преку скаларниот производ на векторите $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ т.е.

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos \alpha$. Од овде се добива аголот α како $\cos \alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Доколку ја

искористиме координатната форма на нормалните вектори $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ тогаш се добива формулата,

$$\cos \alpha = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пресекот на две рамнини е права, која јасно се гледа од слика 8.

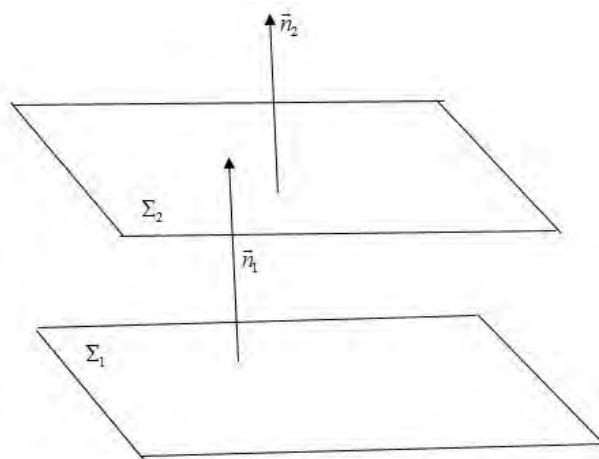
Услов за нормалност на две рамнини. Нека двете рамнини се сечат и нека аголот помеѓу нив е $\alpha = 90^\circ$. Тогаш скаларниот производ на нормалните вектори $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ е нула т.е. $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Со користење на координатната форма на скаларниот производ за нормалните вектори добиваме $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

Равенството

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$

претставува **услов за нормалност (ортогоналност)** на две рамнини Σ_1 и Σ_2 , каде $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$.

Услов за паралелност на две рамнини. Кога две рамнини се паралелни, $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$ тогаш нивните нормални вектори се паралелни, $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, слика 9.



Слика 9

Јасно се гледа од слика 9 дека нормалните вектори се $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ се колинеарни вектори. Тогаш постои реален број λ т.ш. $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$. Со користење на нивните координати имаме

$$A_1 = \lambda A_2, B_1 = \lambda B_2, C_1 = \lambda C_2. \text{ Следува, } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda.$$

Равенството

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$$

претставува **услов за паралелност** помеѓу две рамнини Σ_1 и Σ_2 , каде $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$.

Ако важи условот за паралелност и е точно $\frac{D_1}{D_2} = \lambda$ и тогаш двете рамнини се совпаѓаат, $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. Ако важи условот за паралелност, но и $\frac{D_1}{D_2} \neq \lambda$ тогаш двете рамнини немаат заеднички точки, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$.

Пример 1

Рамнините $\Sigma_1: 3x - 3y + 9z - 2 = 0$ и $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$ се паралелни $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$, бидејќи $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} \neq 1$. Но, рамнините $\Sigma_1: 3x - 3y + 9z - 6 = 0$ и $\Sigma_3: x - y + 3z - 2 = 0$ се совпаѓаат $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$, бидејќи $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$. Додека пак, рамнините $\Sigma_1: 4x + 2y + z - 2 = 0$ и $\Sigma_4: x + y + 2z - 1 = 0$ се сечат, бидејќи $\frac{4}{1} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$.

1

Опреди го заемниот однос на следните рамнини:

- а) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + 3z - 2 = 0$; б) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + z - 2 = 0$;
в) $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$, $\Sigma_2: x - y + z - 1 = 0$.

Пример 2

Да го определиме аголот α под кој се сечат рамнините $\Sigma_1: x - y + z - 2 = 0$ и $\Sigma_2: x + y + 2z - 1 = 0$. Нивните нормални вектори се $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{n}_1 \perp \Sigma_1$ и $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$, $\vec{n}_2 \perp \Sigma_2$. Согласно формулата дадена погоре се добива:

$$\cos \alpha = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha \approx 62^\circ.$$

2 Определи го аголот α помеѓу рамнините $\Sigma_1: 2x - 3y + z - 2 = 0$ и $\Sigma_2: x + y + z + 3 = 0$.

Пример 3 Да ја најдеме равенката на рамнината Σ_1 која минува низ точките $M(1, -1, 0)$ и $N(2, -3, 1)$ и е нормална на рамнината $\Sigma_2: 2x - y + 3z - 10 = 0$. Од $M \in \Sigma_1: A(x-1) + B(y+1) + Cz = 0$ и $N \in \Sigma_1: A(2-1) + B(-3+1) + C \cdot 1 = 0$. Од условот за нормалност $\Sigma_1 \perp \Sigma_2$ имаме $2A - B + 3C = 0$. Добиваме,

$$\begin{cases} A - 2B + C = 0 \\ 2A - B + 3C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2B - A \\ 2A - B + 6B - 3A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2B - A \\ -A + 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -3B \\ A = 5B \end{cases}.$$

Земаме $B = 1$ и добиваме: $C = -3, A = 5$. Равенката на рамнината ќе биде:

$$\Sigma_1: 5x + y - 3z - 4 = 0.$$

3 Напиши равенка на рамнината Σ_1 која минува низ точката $M(1, -1, 0)$ и е паралелна на рамнината $\Sigma_2: 2x - y + 3z - 10 = 0$.

Задачи за самостојна работа

1. Определи го заемниот однос на следните две рамнини:

а) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: 6x - 8y + 2z - 2 = 0$;

б) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: 6x - 8y + 2z - 5 = 0$;

в) $\Sigma_1: 3x - 4y + z - 1 = 0, \Sigma_2: x - 2y + z - 1 = 0$.

За рамнините кои се сечат, најди го аголот α под кој се сечат.

2. Напиши равенка на рамнина Σ која минува низ координатниот почеток и е нормална на рамнините $\Sigma_1: x - y + z - 1 = 0, \Sigma_2: x + y - 2z - 3 = 0$.

3. Напиши равенка на рамнина Σ_1 која минува низ точките $M(1, -1, 0)$ и $N(2, 3, -2)$ и е нормална на рамнината $\Sigma_2: 2x + 3y - z - 2 = 0$.

4. Напиши равенка на рамнина Σ_1 која минува низ точката $N(2, 3, -2)$ и е паралелна со рамнината $\Sigma_2: x - y + z = 0$.

9. Растојание од точка до рамнина

За определување на растојанието од точка до рамнина ќе го искористиме истиот пристап како и добивањето на нормалниот векторски облик на равенка на рамнината.

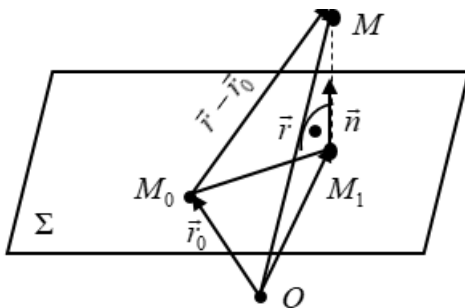
- Што е растојание од точка до рамнина?

Одговорот на ова прашање е дека тоа е најкраткото растојание од точката до рамнината. Нека $M_0(x_0, y_0, z_0)$ е произволна точка од рамнината Σ со радиус-вектор $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и вектор $\vec{n} \perp \Sigma$, $\vec{n} = (A, B, C)$. Нека точката $M \notin \Sigma$ и сакаме да го пресметаме растојанието од точката M до рамнината Σ . На точката $M(x_1, y_1, z_1)$ со радиус-вектор $\vec{r} = (x_1, y_1, z_1)$ ја наоѓаме нејзината проекција M_1 врз рамнината Σ . Тогаш

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Растојанието од точката $M(x_1, y_1, z_1)$ до рамнината Σ е проекцијата на векторот $\vec{r} - \vec{r}_0$ врз векторот $\vec{n}$.

$$\begin{aligned} d = \overline{MM_1} &= |\text{pr}_{\vec{n}}(\vec{r} - \vec{r}_0)| = \left| \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - Ax_0 - By_0 - Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$



Слика 10

Дефиниција 1: Растојанието од точката $M(x_1, y_1, z_1)$ до рамнината Σ е

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

каде $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{n} \perp \Sigma$.

Јасно е дека растојанието од точка до рамнина е $d \geq 0$. Растојанието $d = 0$, ако точката лежи на рамнината.

Пример 1 Равенката на рамнината која минува низ трите точки $A(-1, 2, -3)$, $B(0, 5, -2)$ и $C(-1, -1, 1)$ е

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z+3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 12(x+1) - 3(z+3) + 3(x+1) - 4(y-2) = 15x - 4y - 3z + 14,$$

т.е. $15x - 4y - 3z + 14 = 0$. Растојанието од точката $M(1, 1, -1)$ до рамнината е,

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|15 - 4 + 3 + 14|}{\sqrt{225 + 16 + 9}} = \frac{28}{5\sqrt{10}} = \frac{14\sqrt{10}}{25}.$$

1 Пресметај го растојанието од точката $M(1, 0, -2)$ до рамнината која минува низ точката $A(-1, 2, 3)$ и е паралелна со рамнината $x - 2y + z - 4 = 0$.

Пример 2 Да се состави равенка на рамнина паралелна на рамнината $2x - y - 2z - 2 = 0$, чие растојание од неа е 4.

За да го најдеме растојанието меѓу дадената рамнина $2x - y - 2z - 2 = 0$ и рамнината која е паралелна на дадената и треба да ја определиме, ќе земеме произволна точка од дадената рамнина. Нека $M(1, 1, 0)$ е точка од рамнината $2x - y - 2z - 2 = 0$. Од даденото растојание имаме:

$$d = \frac{|A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|A + B + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 4.$$

Од паралелноста на рамнините следува $\frac{A}{2} = \frac{B}{-1} = \frac{C}{-2} = k$, од каде $A = 2k$, $B = -k$, $C = -2k$.

Ако $k = 1$, тогаш добиваме дека $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$.

Од даденото растојание имаме: $\frac{|2 - 1 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 4 \Leftrightarrow |1 + D| = 12 \Leftrightarrow D_1 = 11; D_2 = -11.$

Оттука ги добиваме равенките на двете рамнини $2x - y - 2z + 11 = 0$ и $2x - y - 2z - 11 = 0$ кои ги задоволуваат дадените услови.

2 Пресметај го растојанието меѓу двете паралелни рамнини $2x - 3y + z - 4 = 0$ и $4x - 6y + 2z - 5 = 0$.

Задачи за самостојна работа

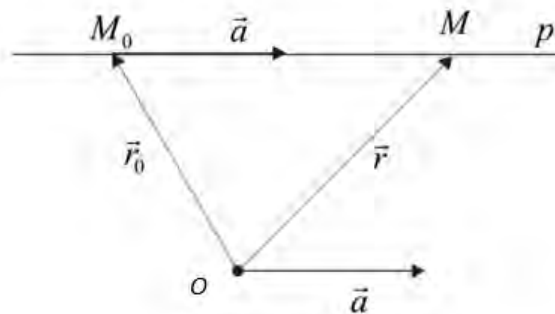
1. Пресметај го растојанието од точката $A(-1, 2, 3)$ до рамнината $x - 2y - 3z - 3 = 0$.
2. На z -оската определи точка подеднакво оддалечена од рамнините $x - 2y - 3z - 3 = 0$ и $3x + y - 2z + 6 = 0$.
3. Пресметај го растојанието од координатниот почеток до рамнината која минува низ точката $A(-1, 2, 3)$ и е нормална на правата $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$.
4. Пресметај ја должината на висината спуштена од темето A на тетраедарот $ABCD / A(1, 2, -3), B(0, 1, 2), C(-3, 0, -1), D(1, -1, -2) /$.
5. определи точка од y -оската која е на растојание 5 единици од рамнината $x + 2y - 2z + 2 = 0$.

10. Равенки на права во простор

Овде ќе бидат дадени равенки на права во простор и тоа: параметарски облик на равенка на права, каноничен облик на равенка на права, равенка на права низ две точки и имплицитно зададена права (како пресек на две рамнини).

Векторски облик на равенка на права

Нека е дадена правата p во просторот, паралелна со вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ и која минува низ произволна точка M_0 со радиус-вектор $\vec{r}_0$. За да ја добиеме равенката на правата p , избираме точка M од правата p со радиус-вектор $\vec{r}$, слика 11.



Слика 11

Согласно слика 11 имаме дека векторот $\vec{a}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{M_0M}$ што значи дека постои скалар t т.ш. $\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}$. Тогаш за радиус-векторот на точката M се добива,

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}.$$

Дефиниција 1: Равенството

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$$

е **векторски облик на равенка на права**, која е паралелна со векторот $\vec{a} \neq \vec{0}$ и минува низ произволна точка M_0 со радиус-вектор $\vec{r}_0$, каде t е скалар. Векторот $\vec{a}$ се нарекува **носечки вектор (носач) на правата**.

Параметарски облик на равенка на права

Со користење на векторската равенка на права $\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{a}$ и координатната форма на векторите $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{r} = (x, y, z)$ добиваме

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \cdot (a_1, a_2, a_3).$$

Добиените равенки $x = x_0 + a_1 t$, $y = y_0 + a_2 t$, $z = z_0 + a_3 t$ се равенки за правата p во координатна форма.

Дефиниција 2: Равенките

$$x = x_0 + a_1 t$$

$$y = y_0 + a_2 t$$

$$z = z_0 + a_3 t$$

се нарекуваат **параметарски облик на равенка на права** која е паралелна со векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и минува низ точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, каде t е скалар.

Пример 1

Параметарски облик на равенка на права која е паралелна со векторот $\vec{a} = (-1, 1, 2)$ и минува низ точката $M_0(2, 0, -3)$ е даден со равенките:

$$x = 2 - t$$

$$y = t$$

$$z = -3 + 2t.$$



1 Напиши параметарски облик на равенка на права која е паралелна со векторот $\vec{a} = (1, -2, -3)$ и минува низ координатниот почеток.

Каноничен облик на равенка на права

Со мала трансформација на равенките кои се параметарски облик на равенка на права за $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$, се добива нов облик на равенка на правата t . Малата трансформација е изразување на скаларот t од сите три равенки

$$t = \frac{x-x_0}{a_1}, t = \frac{y-y_0}{a_2}, t = \frac{z-z_0}{a_3},$$

и изедначување на нивните десни страни.

Дефиниција 3: Равенството

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

се нарекува **каноничен облик на равенка** на права која е паралелна со векторот $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и минува низ точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, каде t е скалар.

Во каноничниот облик на равенка на права се забележува дека се дели со a_1, a_2, a_3 , кои се координати на носечкиот вектор $\vec{a}$ на правата.

Се наметнува прашањето:

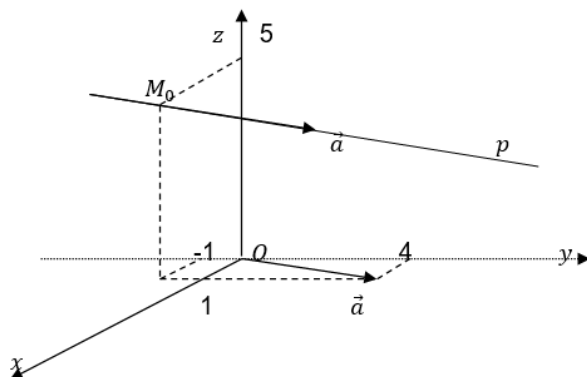
- Што со каноничниот облик на равенка на права, кога некоја од координатите на векторот $\vec{a}$ е нула?

Ако некоја од координатите на носечкиот вектор $\vec{a}$ е нула т.е. некоја од a_1, a_2, a_3 е нула, на пример $a_1 = 0, a_2 \neq 0, a_3 \neq 0$ тогаш каноничен облик на равенка на права е

$$x-x_0=0, \quad \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}.$$

Пример 2

Да ја претставиме во Декартов правоаголен координатен систем правата p што минува низ точката $M_0(1, -1, 5)$ и е паралелна со векторот $\vec{a} = (1, 4, 0)$, слика 12.



Слика 12

Параметарскиот облик на равенка е $x = t + 1, y = 4t - 1, z = 5$.

Каноничниот облик на равенка е $x - 1 = \frac{y + 1}{4}, z - 5 = 0$.

б) Параметарски облик на равенка на права која е паралелна со векторот $\vec{a} = (-4, 3, -1)$ и минува низ точката $M_0(-2, -3, 1)$ е:

$$x = -2 - 4t$$

$$y = -3 + 3t$$

$$z = 1 - t$$

Додека пак, каноничниот облик на равенка на права е $\frac{x + 2}{-4} = \frac{y + 3}{3} = \frac{z - 1}{-1}$.

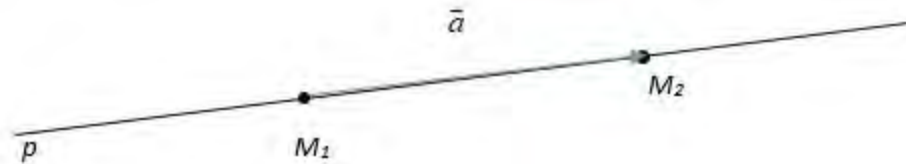


2 Напиши го каноничниот облик на равенка на права која е паралелна со векторот $\vec{a} = (1, -2, -3)$ и минува низ координатниот почеток.

Равенка на права низ две точки

Нека правата t минува низ точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, слика 13. Тогаш правата t е паралелна со векторот $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ и минува низ точката $M_1(x_1, y_1, z_1)$ има каноничен облик:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$



Слика 13

Дефиниција 4: Равенката

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

е равенка на права што минува низ две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Пример 3

Каноничниот облик на равенка на права што поминува низ двете точки $M_1(2, -1, 2)$ и $M_2(1, -2, 0)$ е

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 2}{-2}.$$

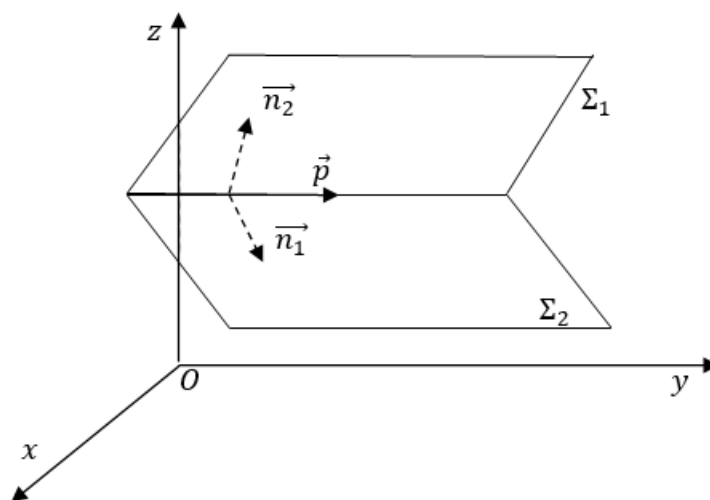
3

Напиши равенка на права која минува низ темето B на четириаголникот $ABCD$ / $A(1, -2, -3), B(2, 3, -6), C(-3, 5, 4), D(-5, -6, 4)$ / паралелна со дијагоналата AC на четириаголникот $ABCD$.

Имплицитно зададена права (како пресек на две рамнини)

Во делот на разгледување на заемен однос на две непаралелни рамнини, рековме дека тие рамнини зафаќаат некој агол и нивниот пресек е права. Со оглед на тоа што пресек на две непаралелни рамнини е права (слика 14), тогаш можеме како равенка на права да го сметаме и овој облик:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$



Слика 14

Дефиниција 5: Равенката на права од облик

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

се нарекува **имплицитно зададена права (општ облик на равенка на права)**, каде $\Sigma_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\Sigma_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ се две непаралелни рамнини.

Секоја равенка на права дадена во имплицитен облик можеме да ја трансформираме во каноничен облик на равенка на права знаејќи дека правата е нормална на нормалните вектори на двете рамнини. Оттука за нејзин носечки вектор можеме да го земеме векторскиот прозвод на двата нормални вектори, кој е исто така нормален на нив.

Постапката е следната:

Векторот кој е паралелен на правата е:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \neq 0,$$

каде $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \perp \Sigma_1$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \perp \Sigma_2$ се нормалните вектори на двете рамнини.

Се наоѓа точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ која ги задоволува и двете равенки од системот, т.е. M_0 е точка од правата, па каноничниот облик на равенка на права е:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Пример 4

Од имплицитно зададена права

$$p: \begin{cases} x-2y+3z+4=0 \\ 5x+4y-z+2=0 \end{cases}$$

да го најдеме нејзиниот каноничен облик.

Векторот паралелен со оваа права е

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (-10, 16, 14).$$

Точката која лежи на правата е $M_0(0, y, z)$ ги задоволува равенките на двете рамнини,

$$\begin{cases} -2y+3z+4=0 \\ 4y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y+12y+6+4=0 \\ z=4y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=-2. \end{cases}$$

т.е. тоа е точката $M_0(0, -1, -2)$. Каноничниот облик на равенка на оваа права е

$$\frac{x}{-10} = \frac{y+1}{16} = \frac{z+2}{14}.$$



Напиши го каноничниот облик на равенка за правата p зададена имплицитно

$$p: \begin{cases} -3x-2y+z+1=0 \\ x+4y-z-3=0 \end{cases}.$$

Потоа, провери дали точката $M(0, 1, 1)$ лежи на правата p !

Задачи за самостојна работа

1. Напиши го параметарскиот и каноничниот облик на равенка на права која е паралелна со векторот $\vec{a} = (-1, 0, 2)$ и минува низ точката $A(1, 2, -2)$.
2. Напиши го параметарскиот и каноничниот облик на равенка на права која е нормална на рамнината $\Sigma: -3x-2y+z+1=0$ и минува низ точката $B(3, -5, -7)$.

3. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ правата $p: \begin{cases} 2x+3y-z-1=0 \\ x-2y+4z+5=0 \end{cases}$ и е паралелна со y -оската.
4. Напиши ја равенката на рамнината која минува низ правата $q: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = z-5$ и низ координатниот почеток.
5. Напиши равенка на права која е паралелна со правата $q: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{4}$ и минува низ точката $C(0, -1, -2)$.
6. Напиши ги равенките на правите кои минуваат низ секое теме од $\triangle ABC$ зададен со координатите $A(-1, 2, -3), B(1, 3, -5), C(0, 4, 6)$ и се паралелни на спротивните страни.
7. Напиши равенка на права која минува низ секое теме на четириаголникот $ABCD$ зададен со координатите $A(-1, 2, 5), B(-2, -3, -6), C(-3, 5, 4), D(5, -6, 4)$ и е паралелна со дијагоналата на четириаголникот $ABCD$ која ги поврзува неговите соседни темиња.

11. Заемен однос на права и рамнина

Во однос на меѓусебната положба, права p и рамнина Σ можат да бидат паралелни, ознака $p \parallel \Sigma$ (правата p и рамнината Σ немаат заеднички точки $p \cap \Sigma = \emptyset$ - или правата p лежи на рамнината Σ), или да имаат една заедничка точка т.е. правата p ја прободува рамнината Σ (специјално, правата p е нормална на рамнината Σ т.е. $p \perp \Sigma$).

Нека е дадена правата p и рамнината Σ ,

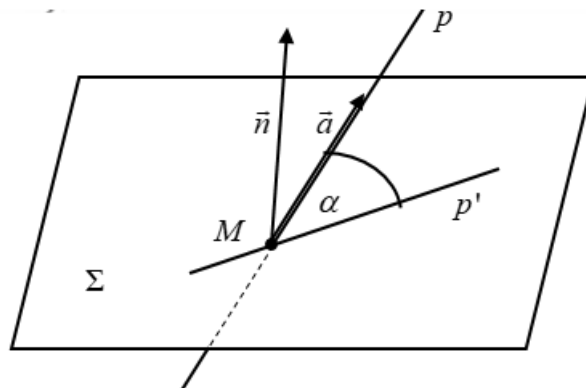
$$p: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3},$$

$$\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$$

каде носечкиот вектор на правата p е $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, точката $M_0(x_0, y_0, z_0) \in p$ и векторот нормален на рамнината Σ , $\vec{n} = (A, B, C)$.

Правата ја прободува рамнината

Нека правата p и рамнината Σ имаат една заедничка точка M т.е. $p \cap \Sigma = \{M\}$, слика 15.



Слика 15

Аголот α меѓу правата p и рамнината Σ е помалиот од двата соседни агли што ги образува правата p и нејзината ортогонална проекција p' врз рамнината Σ , т.е. овие два агли се суплементни агли, за кои важи $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Бидејќи се зема помалиот агол, може да смета дека $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Аголот меѓу правата p и $\vec{n}$ е $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Од тригонометриската

формула за произволен агол важи: $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Оттука за аголот $\frac{\pi}{2} - \alpha$ меѓу

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{n} = (A, B, C)$ од дефиницијата на скаларен производ имаме:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}, \text{ т.е.}$$

$$\sin \alpha = \frac{|a_1 A + a_2 B + a_3 C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Точката во која правата ја прободува рамнината се нарекува **пробод**.

Пример 1

Правата $p: \frac{x-8}{-3} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-7}{-1}$ ја прободува рамнината

$\Sigma: 5x + 3y - 4z + 16 = 0$ и прободот е точката M , која ја добиваме со трансформирање на каноничниот облик на равенка на права p во параметарски облик,

$$\begin{aligned} x &= 8 - 3t \\ y &= -6 + 2t \\ z &= 7 - t. \end{aligned}$$

Со нејзина замена во равенката на рамнината се добива

$$5(8 - 3t) + 3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 16 = 0 \Rightarrow 5t = 10 \Rightarrow t = 2.$$

Прободот на правата со рамнината е точката $M(2, -2, 5)$.

Аголот α помеѓу правата p и рамнината Σ ќе го пресметаме преку формулата

$$\sin \alpha = \frac{|(-3) \cdot 5 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4)|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \Rightarrow \alpha \approx 11^\circ.$$

1 Определи го прободот на правата $p: x-1=2y=\frac{4-z}{2}$ со рамнината $\Sigma: 2x+3y-z+1=0$.

Специјално, $p \perp \Sigma$ т.е. аголот помеѓу правата p и рамнината Σ е $\alpha = 90^\circ$. Тогаш носечкиот вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ на правата p и векторот $\vec{n} = (A, B, C)$ нормален на рамнината Σ се колинеарни. Значи, постои скалар λ т.ш. $\vec{a} = \lambda \vec{n}$. Со користење на нивната координатна форма добиваме $\lambda = \frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$.

Услов за нормалност на права и рамнина е

$$\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}$$

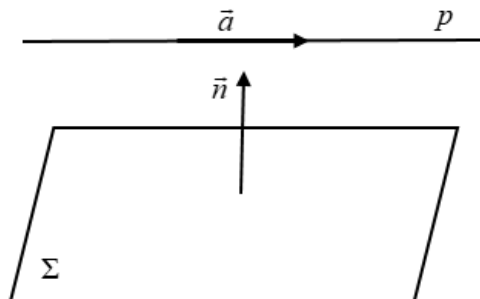
каде $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ е носечкиот вектор на правата, а $\vec{n} = (A, B, C)$ е нормалниот вектор на рамнината.

Пример 2

Правата $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{5}$ е нормална на рамнината $2x-3y+5z-1=0$, бидејќи $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} = \frac{5}{5}$.

Правата е паралелна со рамнината

Нека правата p е паралелна на рамнината Σ т.е. $p \parallel \Sigma$, слика 16.



Слика 16

Ако $p \parallel \Sigma$ тогаш $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \perp \vec{n} = (A, B, C)$. Значи, скаларниот производ на носечкиот вектор $\vec{a}$ на правата p и векторот $\vec{n}$ нормален на рамнината Σ е нула т.е. $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$. Со користење на нивната координатна форма добиваме $a_1A + a_2B + a_3C = 0$.

Равенството

$$a_1A + a_2B + a_3C = 0$$

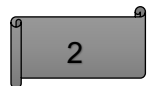
се нарекува **услов за паралелност** на права со носач $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и нормален вектор на рамнината $\vec{n} = (A, B, C)$.

Специјално, правата $p: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ лежи во рамнината $\Sigma: Ax + By + Cz + D = 0$, ако важи условот за паралелност $a_1A + a_2B + a_3C = 0$ и точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ од правата ја задоволува равенката на рамнината $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Пример 3

а) Правата $p: \frac{x-1}{2} = 2-y = z+1$ е паралелна на рамнината $\Sigma: x+y-z-4=0$, бидејќи е задоволен условот за паралелност $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$. Од $1+2+1-4=0$ следува дека оваа правата p лежи во рамнината Σ .

б) Правата $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z+1$, која е паралелна на рамнината $\Sigma: x+y-z-1=0$ не лежи во рамнината, бидејќи е задоволен условот за паралелност $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, но $1+2+1-1=3 \neq 0$ т.е. $p \cap \Sigma = \emptyset$.



Опреди ја заемната положба на правата со рамнината:

а) $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = z-4$, $\Sigma: 2x-y+z-6=0$;

б) $p: \frac{x+2}{-2} = y-1 = \frac{z+1}{-1}$, $\Sigma: 2x-y+z-6=0$.

Задачи за самостојна работа

1. Опреди го прободот на правата $p: \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+z=0 \end{cases}$ со рамнината

$\Sigma: x+2y+3z+4=0$. Колкав е аголот помеѓу правата p и рамнината Σ ?

2. Определи ја заемната положба на правата $p: x = y = 6 - z$ со рамнината $\Sigma: 2x - y + z - 6 = 0$.
3. Напиши равенка на рамнината Σ која е нормална на правата $p: x - 1 = \frac{y}{2} = z + 2$ и минува низ точката $A(-1, 2, -3)$. Потоа, најди го прободот!
4. Напиши равенка на рамнина Σ која минува низ координатниот почеток и на која лежи правата $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.
5. Напиши равенка на правата p која минува низ точката $B(-1, -4, 4)$ и е нормална на рамнината $\Sigma: 2x + 5y - 3z - 4 = 0$. Потоа, определи го прободот!

12. Заемен однос на две прави

Во однос на меѓусебната положба две прави во просторот може да се сечат, да се паралелни и да се разминуваат. Да го разгледаме секој случај поединечно.

Нека се дадени две прави,

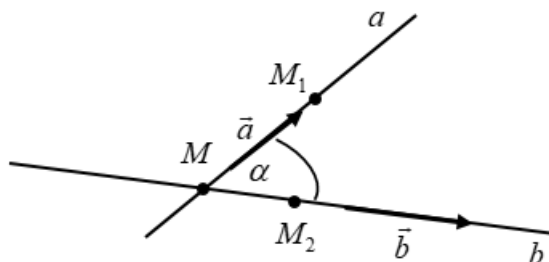
$$a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

$$b: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

каде $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ се носечките вектори и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се точки од правите a и b соодветно.

Правите се сечат

Нека правите a и b се сечат во точка $M(x, y, z)$, слика 17. Аголот α што го формираат двете прави a и b е аголот помеѓу нивните носечки вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Исто како и кај пресек на две рамнини, аголот α помеѓу двете прави a и b можеме да го најдеме со користење на скаларен производ на носечките вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.



Слика 17

Дефиниција 1: Аголот α меѓу правите a и b е

$$\cos \alpha = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}},$$

каде нивните носечки вектори се $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, соодветно и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ $M_2(x_2, y_2, z_2)$ се точки од правите a и b соодветно.

Пресечната точка $M(x, y, z)$ на правите a и b ја добиваме со решавање на систем на нивните равенки дадени во параметарски облик.

Пример 1

За правите

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6}$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

со носечки вектори $\vec{a} = (-2, 3, 6)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$ и точки $M_1(0, 5, -15)$ и $M_2(2, 0, -1)$ кои лежат на правите a и b соодветно. Аголот α што го формираат овие две прави го добиваме преку формулата:

$$\cos \alpha = \frac{|(-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{9}} = \frac{4}{21} \Rightarrow \alpha \approx 79^\circ.$$

Пресечната точка $M(x, y, z)$ за правите a и b ($a \cap b = \{M\}$) ќе ја најдеме со следната постапка. Прво, ги трансформираме дадените равенки во параметарски облик:

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6} = t$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2} = k$$

$$a: x = -2t, y = 3t + 5, z = 6t - 15$$

$$b: x = k + 2, y = -2k, z = 2k - 1$$

Добиваме систем од три линеарни равенки со две непознати,

$$\begin{cases} k + 2 = -2t \\ -2k = 3t + 5 \\ 2k - 1 = 6t - 15 \end{cases}.$$

Како негово решение се добива $t = 1, k = -4$. Тогаш $x = -2, y = 8, z = -9$ т.е. $M(-2, 8, -9)$.

Специјален случај при пресек на две прави е кога правите a и b се нормални т.е. $a \perp b$. Тогаш носечките вектори се нормални т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$. Нивниот скаларен производ е нула т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Со користење на нивната координатната форма имаме $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$.

Равенството

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0$$

се вика **услов за нормалност на прави** со носачи $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Пример 2

За правите:

$$a: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

$$b: \frac{x-3}{-1} = z, y-3 = 0$$

носечките вектори се $\vec{a} = (-1, -1, -1), \vec{b} = (-1, 0, 1)$ и точен е условот за нормалност $(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0$. Значи, правите a и b се нормални т.е. $a \perp b$.



Опреди го аголот α што го зафаќаат правите:

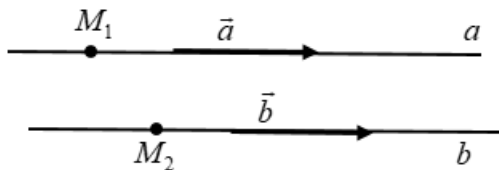
$$a: \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z+3}{4}$$

$$b: \frac{x-6}{5} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+5}{-2}.$$

Дали правите се заемно нормални? Потоа, определи ја нивната пресечна точка.

Правите се паралелни

Нека правите a и b се паралелни ($a \parallel b$), слика 18.



Слика 18

Носечките вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ се паралелни, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ т.е. тие два вектора се колинеарни. Тогаш постои λ т.ш. $\vec{a} = \lambda \vec{b}$. Со користење на координатната форма се добива $\lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Равенството

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

се нарекува **услов за паралелност на прави** со носачи $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Пример 3

Правите

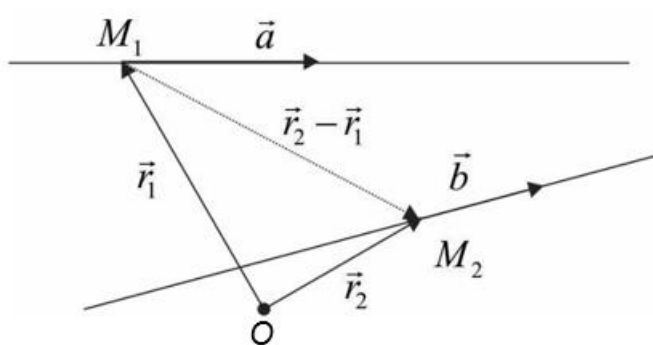
$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}$$

се паралелни ($\vec{a} \parallel \vec{b}$) и важи условот за паралелност на правите

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{-4}{-8}.$$

Кога две прави се сечат или се паралелни, тие лежат во една рамнина. Тоа значи дека носечките вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и векторот $\overrightarrow{M_1M_2}$ лежат во една рамнина т.е. тие се компланарни, каде секоја од точките $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежи на по една права, слика 19.



Слика 19

Знаејќи дека мешаниот производ на три компланарни вектори е нула т.е. $(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b}) = 0$, со користење на координатните форми на векторите се добива:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенството

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

нарекува **услов за компланарност** на две прави со носачи $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ и точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, кои лежат на нив соодветно.

Условот за компланарност е и **услов за пресек на две прави**.

Пример 4

а) За правите од пример 1 кои се сечат

$$a: \frac{x}{-2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+15}{6}$$

$$b: x-2 = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

со носечки вектори $\vec{a} = (2, 3, 6)$, $\vec{b} = (1, -2, 2)$ и векторот $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 2, 1)$, важи условот за компланарност

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 14 \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 56 - 30 - 42 + 24 - 20 = 0.$$

б) За правите од пример 2 кои се паралелни

$$a: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{-1}$$

$$b: \frac{x-3}{-1} = z, y-3=0$$

со носечки вектори $\vec{a} = (-1, -1, -1)$, $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ и векторот $\overrightarrow{M_1M_2} = (1, 0, -1)$, важи условот за компланарност

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

в) За правите од пример 3 кои се паралелни

$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}$$

со носечки вектори $\vec{a} = (3, 1, -4)$, $\vec{b} = (6, 2, -8)$ и векторот $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 2, 1)$, важи условот за компланарност

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 8 + 6 + 48 - 6 - 8 + 48 = 0.$$



Дадени се правите

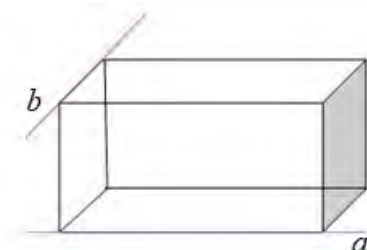
$$a: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$$

$$b: x-2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

Дали правите a и b лежат во една рамнина ?

Разминувачки прави

Ако две прави не се сечат и не се паралелни тогаш тие се разминувачки. На слика 20 се дадени две разминувачки прави a и b . Бидејќи две прави кои се сечат или се паралелни образуваат една рамнина, тогаш за нив како што веќе спомнавме важи условот за компланарност. Па, од тука логичен заклучок е дека ако две прави се разминувачки тогаш за нив не важи условот за компланарност.



Слика 20

Дефиниција 2: Две прави a и b

$$a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$$

$$b: \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}$$

се **разминувачки**, ако

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

каде $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ се нивни носечки вектори и точките $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат на правите соодветно.

Пример 5

За правите:

$$a: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

$$b: -x = \frac{y+1}{-4} = z$$

со носечки вектори $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, -4, 1)$ и векторот $\overrightarrow{M_1M_2} = (0, -2, 0)$, не важи условот за компланарност

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 + 4 = 6 \neq 0.$$

Правите a и b се разминувачки прави.



Дадени се правите

$$a: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$$

$$b: x-2 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Провери дали образуваат рамнина или се разминувачки!

Задачи за самостојна работа

1. Испитај ја заемната положба на правите:

$$a) \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+3z+1=0 \end{cases} \text{ и } \frac{x+3}{-4} = y-4 = \frac{z}{3};$$

$$б) \frac{x-4}{2} = y = \frac{z+1}{2} \text{ и } \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{5}.$$

2. Напиши равенка на права што минува низ точката $A(1, 2, -1)$ и е паралелна со

$$\text{правата } \begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}.$$

3. Дадени се правите $\frac{x-1}{2} = y-7 = \frac{z-3}{4}$ и $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{\lambda} = z+2$. Определи го параметарот λ т.ш. правите да образуваат рамнина! Ако се сечат, определи го аголот меѓу нив и координатите на нивната пресечна точка!

4. Напиши равенка на права која минува низ пресекот на правите $x = \frac{y-2}{-1}, z+1=0$ и

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1} \text{ и минува низ точката } B(-1, 0, 1).$$

5. Напиши равенка на права која е нормална на правите $\frac{x-3}{-2} = y+1 = \frac{z}{2}$ и

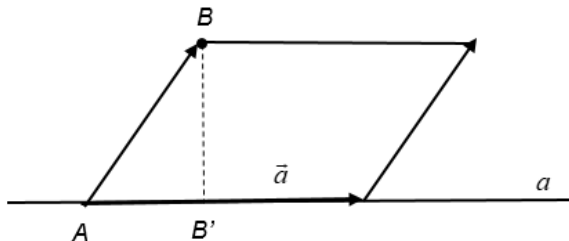
$$x+1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2} \text{ и минува низ точката } C(2, 3, 4).$$

13. Растојание помеѓу две прави

Претходно веќе рековме дека заемната положба на две прави во просторот е: правите да се сечат, да се паралелни или да се разминуваат. Кога две прави се сечат, јасно е дека нивното меѓусебно растојание е нула. Но, кога се паралелни или се разминуваат тогаш растојанието помеѓу нив не е нула. Да ги разгледаме двата случаи поединечно.

Растојание помеѓу две паралелни прави

Растојанието помеѓу две паралелни прави е најкраткото растојание помеѓу нив, а тоа е должината на нормалата спуштена од било која точка од едната права до другата права. Ова значи дека растојанието помеѓу две паралелни прави се сведува на растојание од било која точка од едната права до другата права. Да ја изведеме формулата за растојание d од точката B до правата a , слика 21.



Слика 21

Точката $B \notin a$. Над векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$, конструираме паралелограм чија плоштина е $P = |\vec{a} \times \overrightarrow{AB}|$. Плоштината на паралелограмот може да ја пресметаме и со формулата $P = |\vec{a}| \cdot h$, каде $h = \overline{BB'}$. Со користење на овие две формули за пресметување на плоштина на паралелограм се добива дека $\overline{BB'} = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{a}|}$.

Дефиниција 1: Растојанието d од точката B до правата a се пресметува по формулата

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{a}|}$$

каде $\vec{a}$ е носечкиот вектор на правата a и точката $A \in a$.

Јасно е дека кога точката $B \in a$, растојанието од точката B до правата a е $d = 0$.

Растојанието може да го добиеме и во координатна форма, освен во векторска форма, ако се дадени координатните форми за носечкиот вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и координатите на точките $A(x_1, y_1, z_1) \in a$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тоа ќе го спроведеме преку следниот пример.

Пример 1

Растојанието од точката $B(1, -1, 0)$ до правата $a: \frac{x-2}{3} = y-3 = \frac{z+1}{-1}$ ќе го најдеме на следниот начин:

- Носечкиот вектор на правата е a е $\vec{a} = (3, 1, -1)$ со модул $|\vec{a}| = \sqrt{11}$ и точка $A(2, 3, -1) \in a$.
- Го наоѓаме векторот кој е векторски производ на векторите $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$,

$$\vec{a} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -2, -11);$$

- Модулот на векторот $|\vec{a} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{134}$;
- Растојанието ќе биде $d = \frac{\sqrt{134}}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{1474}}{11}$.

1 Пресметај го растојанието од точката $B(2, 1, -2)$ до правата $a: \frac{x-5}{-1} = y+3 = \frac{z+1}{-2}$.

За да го пресметаме растојанието помеѓу двете паралелни прави a и b ($a \parallel b$) зададени во каноничен облик $a: \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$, $b: \frac{x-x_2}{a_1} = \frac{y-y_2}{a_2} = \frac{z-z_2}{a_3}$ ќе го најдеме преку растојанието од точката $B(x_2, y_2, z_2) \in b$ до правата a на начин даден погоре.

Јасно е дека кога $a \equiv b$, растојанието помеѓу двете прави е $d = 0$.

2 Пресметај го растојанието помеѓу паралелните прави

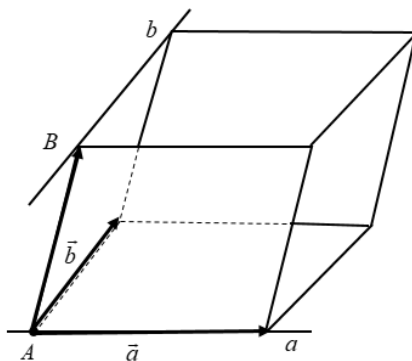
$$a: \frac{x-1}{3} = y+2 = \frac{z}{-4}$$

$$b: \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-8}.$$

Растојание помеѓу две разминувачки прави

Растојанието помеѓу две разминувачки прави може да се пресмета на повеќе начини. Овде ќе биде презентирани начинот каде се користи конструкција на паралелопипед.

Нека се дадени две разминувачки прави a и b со носечки вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соодветно и точки $A \in a$ и $B \in b$. Над векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{AB}$ конструираме паралелопипед како на слика 22.



Слика 22

Растојанието d помеѓу разминувачките прави a и b ќе биде висината на паралелопипедот. Волуменот на паралелопипедот може да го пресметаме преку мешаниот производ $V = |(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|$. Волуменот се пресметува и преку формулата $V = H \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$, каде $B = |\vec{a} \times \vec{b}|$ е плоштината на паралелограмот конструиран над векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, кој игра улога на основа на паралеоипедот. Од овие две формули имаме дека

$$V = H \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$
$$d = H = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Дефиниција 2: Растојанието d помеѓу разминувачките прави a и b се пресметува по формулата

$$d = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

каде $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се носечки вектори на правите a и b соодветно и точките $A \in a$ и $B \in b$

Растојанието може да го добиеме и во координатна форма, освен во векторска форма, ако се дадени координатните форми за носечките вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ на правите a и b соодветно и координатите на точките $A(x_1, y_1, z_1) \in a$ и $B(x_2, y_2, z_2) \in b$. Тоа ќе го спроведеме преку следниот пример.

Пример 2

Да го пресметаме растојанието помеѓу разминувачките прави a и b ,

$$a: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$$

$$b: -x = \frac{y+1}{-4} = z$$

со носечки вектори $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (-1, -4, 1)$ и точки $A(0, 1, 0) \in a$ и $B(0, -1, 0) \in b$ преку следните чекори:

1. Го наоѓаме мешаниот производ на векторите $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}$ согласно формулата:

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, 0) \text{ и } (\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 6;$$

2. Го наоѓаме векторскиот производ на векторите $\vec{a}, \vec{b}$ согласно формулата:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 11).$$

3. Го пресметуваме растојанието меѓу разминувачките прави a и b :

$$d = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{AB})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{6\sqrt{131}}{131}.$$

3

Пресметај го растојанието помеѓу разминувачките прави:

$$a: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$$

$$b: x-2 = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}.$$

Задачи за самостојна работа

1. Нека е даден триаголникот $\triangle ABC$ со координатите на темињата $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$. Пресметај го растојанието од секое теме на триаголникот до спротивната страна.

2. Пресметај го растојанието помеѓу паралелните прави,

$$a: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-4}{2}$$

$$b: \frac{x-5}{8} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{4}.$$

3. Нека е даден паралелограмот $ABCD$ со координатите на темињата $A(3, -1, 2), B(1, 2, -1), C(2, 5, -6), D(4, 2, -3)$. Пресметај ги растојанијата помеѓу двата пара паралелни прави на кои лежат страните на паралелограмот.
4. Пресметај го растојанието помеѓу разминувачките прави

$$a: \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{5}$$

$$b: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = z-2.$$

5. Пресметај го растојанието помеѓу правите:

а) $a: x = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}, b: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{6};$

б) $a: \begin{cases} x+2y-2z-8=0 \\ 2x+y-z-1=0 \end{cases}, b: \begin{cases} 3x-2y-2z-15=0 \\ 3x+y+4z-21=0 \end{cases};$

в) $a: \begin{cases} 3x+y-z+4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}, b: \frac{x-1}{2} = y-7 = \frac{z-3}{4}.$

14. Задачи за повторување на модуларната единица

- Пресметај го волуменот и висината на тетраедарот $ABCD$ даден со координатите на темињата $A(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}), B(4, 3, 2), C(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}), D(2, -3, -4)$.
- Напиши равенка на рамнина која минува низ точките $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, -3, 3)$. Дали точката $M(1, -1, 1)$ лежи на рамнината?
- Напиши равенка на рамнина која минува низ пресекот на рамнините $3x+2y-5z+10=0$ и $x+3y+z-2=0$ и минува низ координатниот почеток.
- Напиши равенка на рамнина која минува низ точката $A(-1, 1, \frac{5}{6})$ и на координатните оски отсекува отсечки кои се однесуваат $3:2:1$.

5. Напиши равенка на рамнина која минува низ точките $A(0,0,2)$ и $B(6,0,0)$ и зафаќа агол $\frac{\pi}{6}$ со Oxy - рамнината.
6. За кои вредности на параметрите a и b рамнините $2x-3y+az-3=0$ и $8x-12y+20z+b=0$ се преклопуваат?
7. Испитај ја меѓусебната положба на правите $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$. Ако правите се сечат тогаш пресметај го растојанието од координатниот почеток до пресечната точка.
8. Напиши равенка на права која минува низ средината на отсечката AB дадена со координатите на крајните точки $A(1,-3,-2)$, $B(-3,5,-6)$ и низ точката $C(0,0,2)$. Колкав е аголот помеѓу двете прави?
9. Напиши равенка на права која минува низ точката $A(1,3,2)$ и е нормална на правата $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{-1}$.
10. Пресметај го растојанието помеѓу правите $\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = z-3$ и $\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = z$.

Модуларна единица 5 – Неопределен интеграл (за сите останати струки)

1. Неопределен интеграл

Задачата на диференцијалното сметање е да се занимава со наоѓање изводи на дадена функција $y = f(x)$. Интегралното сметање решава проблем спротивен на проблемот за наоѓање на извод. Тој проблем е всушност одредување на функцијата чијшто извод е познат. Токму поради тоа, интегралното сметање се сфаќа како инверзна операција на диференцијалното сметање.

Дефиниција 1: Нека е дадена функција f дефинирана на интервалот (a, b) . Секоја диференцијабилна функција F дефинирана на интервалот (a, b) така што

$$F'(x) = f(x), x \in (a, b),$$

се нарекува **примитивна функција** за функцијата f .

Пример 1

За функцијата $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, примитивна функција е $F(x) = \frac{x^4}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

бидејќи $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3 = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Но ако ја разгледаме и функцијата $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + 5$, $x \in \mathbb{R}$, тогаш и за неа важи

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 5\right)' = x^3 = f(x), x \in \mathbb{R}.$$

Оттука следува следната теорема:

Теорема 1: Нека $F(x)$ е примитивна функција на функцијата $f(x)$ на интервалот (a, b) . Тогаш и функцијата $F(x) + C$ каде $C \in \mathbb{R}$ е произволна константа, е исто така примитивна функција за функцијата $f(x)$.

Доказ: Тврдењето во теоремата следува од тоа што $F(x)$ и $F(x) + C$ имаат ист прв извод кој е еднаков на функцијата $f(x)$.

$$(F(x) + C)' = (F(x))' = f(x).$$

■

Теорема 2: Нека $F(x)$ и $G(x)$ се различни примитивни функции на функцијата $f(x)$ на интервалот (a, b) . Тогаш за функцијата $G(x)$ важи $G(x) = F(x) + C$ каде $C \in \mathbb{R}$.

Доказ: Ако $F(x)$ и $G(x)$ се различни примитивни функции на функцијата $f(x)$ на интервалот (a, b) , тогаш важи:

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Нека $H(x) = G(x) - F(x)$, од каде ќе следува дека

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

За $H'(x) = 0$ имаме дека $H(x) = C$,

па според тоа $C = G(x) - F(x)$, т.е. $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. ■

Операцијата на наоѓање на примитивна функција на дадена функција се нарекува **интегрирање**. Оваа операција е инверзна на диференцирањето односно на наоѓањето извод на функција.

Но, кај диференцирањето забележавме дека функцијата е еднозначно определена, што не е случај кај интегрирањето. Тоа го забележавме и од пример 1.

Од теорема 1 можеме да заклучиме дека секоја функција има бесконечно многу примитивни функции.

Исто така, од теорема 2 можеме да заклучиме дека наместо да се наоѓаат сите примитивни функции на дадена функција, доволно е да се најде само една, која било од нив. Ако се најде само една примитивна функција, сите останати се добиваат со додавање на константа C .

Множеството од сите примитивни функции на функцијата f , можеме да го означиме како: $\{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$.

Дефиниција 2: Множеството од сите примитивни функции на дадена функција f се нарекува **неопределен интеграл**.

Неопределениот интеграл на функцијата f се означува со:

$$\int f(x) dx.$$

Според ова, можеме да запишеме дека $\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ или само накратко $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Во дефиниција 2, f се нарекува **интегранд** или **подинтегрална функција**, а $f(x)dx$ се нарекува **подинтегрален израз**.

Константата C пак во $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, се вика **интеграциона константа**.

Пример 2

Бидејќи $(a^x)' = a^x \ln a$, следува дека $\frac{a^x}{\ln a}$ е примитивна функција на

$a^x, a > 0, a \neq 1$. Па можеме да запишеме дека $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$.

1

Најди ја примитивната функција на функцијата:

а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = x^n$.

Видовме дека дадена функција може да има бесконечно многу примитивни функции. Но, не секоја функција има примитивна. Можеме да нагласиме дека секоја непрекината функција има примитивна.

Ако за дадена функција f дефинирана на интервалот (a, b) постои примитивна функција, тогаш велиме дека функцијата f е **интеграбилна** на интервалот (a, b) .

Делот од математиката кој се занимава со одредувањето на примитивните функции, т.е. со пресметување на интегралите, како и нивната примена се нарекува **интегрално сметање**.

Ако сакаме геометриски да го објасниме поимот на неопределен интеграл, тогаш бидејќи го дефинираме како множество од примитивни функции, слободно можеме да кажеме дека неопределениот интеграл претставува множество од криви во рамнината, кои се графици на примитивните функции и се нарекуваат **интегрални криви**.

За да ја најдеме интегралната крива која што минува низ дадена точка $A(x_0, y_0)$, тогаш со замена на координатите на точката $A(x_0, y_0)$ во $y = F(x) + C$, ќе ја добиеме интеграционата константа, т.е.

$$y_0 = F(x_0) + C, \text{ од каде } C = y_0 - F(x_0).$$

Тогаш бараната интегрална крива која минува низ точката $A(x_0, y_0)$ ја има равенката $y = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Ќе ги разгледаме следните примери:

Пример 3 Ќе покажеме дека $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ е примитивна функција на функцијата

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ако пресметаме извод од функцијата $F(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, ќе добиеме:

$$(F(x))' = \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Пример 4 Ќе ја најдеме онаа примитивна функција F на $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ чијшто график минува низ точката $A(1,2)$.

Примитивна функција на функцијата $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ е $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, бидејќи:

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} \right)' = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Со замена на координатите на точката $A(1,2)$ во $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x}$, добиваме

$$F(1) = \frac{1^4}{4} + 2\sqrt{1} = \frac{9}{4}.$$

Значи бараната интегрална крива која минува низ точката $A(1,2)$ ја има равенката

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0), \text{ т.е. } y = \frac{x^4}{4} + 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}.$$

Задачи за самостојна работа

1. Најди по една примитивна функција за функцијата:

а) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$; б) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

в) $f(x) = \sin x$; г) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

2. Покажи дека $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}|$ е примитивна функција на функцијата

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

3. Провери дали е точно:

а) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x} = \frac{1}{2 \ln^2 x} + C;$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{x-1} dx.$

в) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \operatorname{tg} x - x + C;$

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$

4. Определи ја онаа примитивна функција F на f чијшто график минува низ точката $A(0, 2)$, ако:

а) $f(x) = 3x^2;$ б) $f(x) = \ln x, x > 0;$ в) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. Основни својства на неопределениот интеграл и таблица на основни интеграл

Од дефиницијата на неопределениот интеграл следуваат следните својства:

Теорема 1: Ако функцијата f е интегрибилна на интервалот (a, b) , тогаш важи:

1. Изводот на неопределениот интеграл е еднаков на подинтегралната функција, т.е. ако $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, тогаш

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), x \in (a, b).$$

2. Диференцијалот на неопределениот интеграл е еднаков на подинтегралниот израз, т.е. ако $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, тогаш

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx, x \in (a, b).$$

3. Неопределениот интеграл од диференцијалот на примитивната функција $F(x)$ е еднаков на $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, т.е. важи:

$$\int dF(x) = \int F'(x) dx = \int f(x) dx = F(x) + C, x \in (a, b).$$

Доказ: 1. Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f на интервалот (a, b) , односно $\int f(x) dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Тогаш имаме: $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

2. Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f на интервалот (a, b) , односно $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Тогаш имаме: $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx, x \in (a, b)$.

3. Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f на интервалот (a, b) , односно $\int f(x)dx = F(x) + C, C \in \mathbb{R}$.

Тогаш имаме: $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C, x \in (a, b)$. ■

Теорема 1 покажува дека диференцирањето и интегрирањето се инверзни операции.

При пресметување на неопределениот интеграл, важат својствата дадени во следната теорема:

Теорема 2:

1. Ако функциите f и g се интегрибилни на интервалот (a, b) , тогаш и нивниот збир $f + g$ и нивната разлика $f - g$ се интегрибилни функции на интервалот (a, b) и важи:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, x \in (a, b).$$

2. Ако функцијата f е интегрибилна на интервалот (a, b) и ако $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогаш и функцијата $k \cdot f$ е интегрибилна на интервалот (a, b) и важи:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, x \in (a, b).$$

Доказ: 1. Во диференцијалното сметање важи дека: $d(f(x) \pm g(x)) = df(x) \pm dg(x)$. Ако ова равенство го интегрираме од двете страни, добиваме:

$$\int d(f(x) \pm g(x)) = \int (df(x) \pm dg(x)).$$

Со користење на 3. од теорема 1, добиваме:

$$\int (df(x) \pm dg(x)) = \int d(f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x) = \int df(x) \pm \int dg(x).$$

4. Бидејќи важи: $d\left(\int k \cdot f(x)dx\right) = kd\left(\int f(x)dx\right)$, а користејќи го 2, од теорема 1, добиваме: $d\left(\int k \cdot f(x)dx\right) = k \int df(x) = k \int f(x)dx$. ■

Својствата докажани во теорема 2 се познати и како **основни правила за интегрирање**.

Врз основа на дефиницијата на неопределен интеграл и таблицата на основни изводи, можеме да ја напишеме **таблицата на основни интеграли**.

1. $\int dx = x + C$	2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$
5. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	8. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$
9. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$	10. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
11. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	12. $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$	14. $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right + C$	

Со користење на основните својства на неопределениот интеграл и таблицата на основни интеграли, ќе решиме неколку примери:

Пример 1

Да ги решиме следниве неопределени интеграли:

а) $\int x^6 dx$; б) $\int (x^2 + 3x - 1) dx$; в) $\int x^3 \sqrt{x} dx$; г) $\int (2^x + 5^x)^2 dx$.

а) Со користење на таблицата со основни интеграли, т.е. вториот основен интеграл, имаме:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

б) Со користење на таблицата со основни интеграли и правилото за интегрирање на збир и разлика на функции, имаме:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 1) dx &= \int x^2 dx + \int 3x dx - \int dx = \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int dx = \frac{x^3}{3} + C_1 + 3 \frac{x^2}{2} + 3C_2 - x - C_3 = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + (C_1 + 3C_2 - C_3) = \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^2}{2} - x + C. \end{aligned}$$

в) Најпрво ќе направиме трансформација на подинтегралната функција, а потоа ќе го искористиме вториот табличен интеграл:

$$\int x^3 \sqrt{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{3}} dx = \int x^{1+\frac{1}{3}} dx = \int x^{\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + C = \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} + C = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + C.$$

г) Ако ја презапишеме поинаку подинтегралната функција, ќе добиеме:

$$\begin{aligned} \int (2^x + 5^x)^2 dx &= \int (2^{2x} + 2 \cdot 2^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \int (4^x + 2 \cdot 10^x + 25^x) dx = \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 10^x dx + \int 25^x dx = \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \frac{10^x}{\ln 10} + \frac{25^x}{\ln 25} + C \end{aligned}$$

Поради поедноставно пишување, нема да запишуваме повеќе константи во резултатот, туку директно на крај ќе запишеме само една константа.



Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int (1 + 2x + 4x^2) dx$; б) $\int (1 - 3x) \cdot (x^2 + 1) dx$; в) $\int \left(\frac{2\sqrt{x} - 3x - 4}{x} \right) dx$.

Пример 2

Ќе ги решиме следните неопределени интеграли:

а) $\int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3 \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx$; в) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$.

Со користење на таблицата на основни интеграли, како и на правилата за интегрирање, ќе имаме:

а)

$$\begin{aligned} \int \left(x^4 - \sqrt{x} + x^3 \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int \left(x^4 - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{-2} \right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{2}{5} \sqrt{x^3} + \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} - \frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

б)

$$\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx = \int \frac{\sqrt{(x^2 + x^{-2})^2}}{x^3} dx = \int \frac{x^2 + x^{-2}}{x^3} dx = \int \left(\frac{1}{x} + x^{-5} \right) dx = \ln|x| + \frac{x^{-4}}{-4} + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C.$$

в)

$$\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx = \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1) dx = \int (e^2)^x dx - \int e^x dx + \int dx =$$

$$= \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} - e^x + x + C = \frac{e^{2x}}{2} - e^x + x + C.$$



2 Реши ги неопределените интегралы:

а) $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx$; б) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$.

Пример 3

Ќе ги решиме следните интегралы:

а) $\int (2x - 3 \sin x + \cos x) dx$; б) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$; в) $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$.

а) Со користење на таблицата со основните интегралы на интегралы решаваме:

$$\int (2x - 3 \sin x + \cos x) dx = 2 \int x dx - 3 \int \sin x dx + \int \cos x dx = 2 \frac{x^2}{2} - 3(-\cos x) + \sin x + C =$$

$$= x^2 + 3 \cos x + \sin x + C.$$

б) Со користење на таблицата со основните интегралы на интегралы решаваме:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

в) Со користење на таблицата со основните интегралы на интегралы решаваме:

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.\end{aligned}$$



Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$; б) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

Задачи за самостојна работа:

1. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int (x^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}^x) dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x} dx$; в) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx$; г) $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx$;
 д) $\int a^x \left(2 - \frac{a^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx$; е) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \right) dx$; е) $\int (2 + x^2)^3 dx$.

2. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$; б) $\int \frac{1 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;
 г) $\int \left(\frac{x}{3} - 4 \sin x + 5 \cos x \right) dx$; д) $\int \frac{1}{\sin^2 x + \cos 2x} dx$;

3. Метод на замена

За решавање на неопределени интеграли неопходно е да се применуваат одредени методи (техники на интегрирање). Наједноставните интеграли се решаваат преку примена на таблица и основни својства, која веќе ја разгледавме, но таа интеграција е невозможно да се примени во сите случаи. Еден од основните методи кои се користат за решавање на посложени неопределени интеграли е методот на замена на променливата со нова променлива или методот на супституција.

Овој метод се однесува на замена на променливата x со нова променлива t , која би го упростила почетниот интеграл сведувајќи го на табличен интеграл.

Методот на замена е даден во следната теорема:

Теорема 1: Нека f е интегрална функција на интервалот (a, b) и нека φ е диференцијабилна функција која интервалот (α, β) го пресликува во интервалот (a, b) . Тогаш важи:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \text{за } x = \varphi(t).$$

Доказ: Нека функцијата F е примитивна функција на функцијата f . Тогаш според дефиницијата ќе важи $\int f(x) dx = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$. Ќе дефинираме функција $\Phi(t) = F(\varphi(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Ако ја диференцираме функцијата Φ ќе добиеме $\Phi'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Оттука добиваме дека функцијата Φ е примитивна функција на функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Тоа значи дека од дефиницијата на неопределениот интеграл ќе имаме:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Ако земеме предвид дека $x = \varphi(t)$, тогаш:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C. \quad \blacksquare$$

Со користење на методот на замена, дел од подинтегралната функција се заменува со нова променлива. Мораме да нагласиме дека не постои правило според кое се прави смената $x = \varphi(t)$. Исто така диференцијалот на старата функција мора да се изрази преку диференцијалот на новата променлива. Целта е да се добијат еден или повеќе таблични интегрални кои лесно се решаваат. После решавањето на интегралот, потребно е да се вратиме на почетната променлива, користејќи ја замената.

Ќе го разгледаме следниот пример:

Пример 1 ▶ Да ги решиме неопределените интегрални:

$$\text{а) } \int (5-2x)^4 dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(x-2)^3}; \quad \text{в) } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx; \quad \text{г) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

а) За решавање на овој интеграл можеме да ја искористиме биномната формула и да ја запишеме подинтегралната функција $(5-2x)^4$ во развиен облик, а потоа да решаваме со

користење на таблични интегрални. Но, овој начин одзема повеќе време. Поради тоа ќе го искористиме методот на замена.

Воведуваме смена $t = 5 - 2x$, од каде $dt = -2dx$ или ако го изразиме диференцијалот на функцијата со диференцијалот на новата променлива ќе имаме: $dx = -\frac{dt}{2}$.

$$\text{Оттука, } \int (5-2x)^4 dx = \int t^4 \left(\frac{-dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^4 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^5}{5} + C = -\frac{(5-2x)^5}{10} + C.$$

б) Сосема слично на решениот неопределен интеграл под а) ја користиме смената $t = x - 2$, $dt = dx$.

$$\int \frac{dx}{(x-2)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C.$$

в) Во овој пример слично на претходните два примери, ја користиме смената

$$t = \frac{1}{x}, \quad dt = -\frac{1}{x^2} dx, \quad \text{од каде добиваме: } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

г) Со користење на смената $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x} dx$, добиваме:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

1 Реши ги неопределените интегрални:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{5x+4}; \quad \text{б) } \int \sqrt[5]{(4-7x)^3} dx; \quad \text{в) } \int \frac{x-1}{x^2-2x+2} dx; \quad \text{г) } \int e^{\sin x} \cos x dx; \quad \text{д) } \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx.$$

Пример 2

Да ги решиме неопределените интегрални:

$$\text{а) } \int \sin ax dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)}; \quad \text{в) } \int \sin^5 x \cos x dx.$$

а) Со користење на смената $t = ax$, $dt = a dx$ добиваме:

$$\int \sin ax dx = \frac{1}{a} \int \sin t dt = -\frac{1}{a} \cos t + C = -\frac{\cos ax}{a} + C.$$

б) Од смената $t = 3x + 2$, $dt = 3dx$ се добива:

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x+2)} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{3} \operatorname{tg} t + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x+2) + C.$$

в) Од смената $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ се добива:

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$



Реши ги неопределените интегралы:

а) $\int \sin^3 6x \cdot \cos 6x dx$; б) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$; в) $\int \operatorname{tg} x dx$; г) $\int 2e^x \cos(e^x) dx$.

Пример 3

Да ги решиме неопределените интегралы:

а) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$; б) $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}.$

а) При решавање на интегралот ја користиме смената $\ln \frac{1+x}{1-x} = t$, од каде $\frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} dt$, со што добиваме:

$$\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

б) За решавање на овој интеграл ќе користиме два смени:

- со првата смена $e^{\frac{x}{2}} = t$, $\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = dt$, $dx = \frac{2}{t} dt$, $e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = t^2$ интегралот се трансформира во:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t(t+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = \\ &= 2 \int \frac{1+t-t}{t^2(1+t)} dt = 2 \int \left(\frac{1+t}{t^2(1+t)} - \frac{t}{t^2(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t-t}{t(1+t)} \right) dt = \\ &= 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1+t}{t(1+t)} + \frac{t}{t(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{(1+t)} \right) dt = 2 \int \left(t^{-2} - \frac{1}{t} \right) dt + 2 \int \frac{1}{(1+t)} dt = (*), \end{aligned}$$

понатаму со користење на смената $s = t+1$, $ds = dt$ за интегралот $\int \frac{1}{(1+t)} dt$, добиваме:

$$(*) = 2 \left(\frac{t^{-1}}{-1} - \ln|t| + \ln|s| \right) + C = (**),$$

од каде враќајќи се наназад во воведените смени, добиваме:

$$(**) = 2 \left(-\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} - \ln \left| e^{\frac{x}{2}} \right| + \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| \right) + C = -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C.$$

Забелешка: Понекогаш е потребно неколку пати да се воведува замена со нова променлива, за да интегралот се сведе на табличен.

Пример 4

Да го решиме неопределениот интеграл $\int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$.

Прво ја користиме смената $\ln x = t$, од каде $\frac{1}{x} dx = dt$, а потоа уште еднаш воведуваме

смена $\ln t = u$, од каде $\frac{1}{t} dt = du$.

Со тоа за интегралот имаме:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx &= \int \frac{1}{t \ln t} dt = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\ln|t|| + C = \\ &= \ln|\ln|\ln x|| + C. \end{aligned}$$

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int x(x^2 - 13)^{23} dx; \quad \text{б) } \int (3x^2 - 2x + 1)(x^3 - x^2 + x - 9)^7 dx; \quad \text{в) } \int \frac{(2x+3)dx}{x^2 + 3x - 10}.$$

2. Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int (x^2 - 3)\sqrt[5]{x^3 - 9x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{x dx}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}; \quad \text{в) } \int \frac{x^2}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

3. Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int \frac{e^x + 1}{e^x + x} dx; \quad \text{б) } \int \frac{1}{x \ln^5 x} dx; \quad \text{в) } \int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$$

4. Реши ги неопределените интеграли:

$$\text{а) } \int \sin^3 x \cos^3 x dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + 3} dx; \quad \text{в) } \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx; \quad \text{г) } \int \frac{1}{\sin x} dx.$$

4. Метод на парцијална интеграција

Методот на замена на променливата не е доволен за да се пресметуваат неопределени интеграл на поширока класа од функции. Честопати подинтегралната функција е запишана во облик на производ на функција и диференцијал на друга функција, но притоа не може да се воведо замена на променливата за да се сведе интегралот на табличен.

Поради тоа пристапуваме кон друг метод за решавање на неопределени интеграл, а тоа е **методот на парцијална интеграција** или методот на **интеграција по делови**.

Формулата за парцијална интеграција е дадена во следната теорема:

Теорема 1. Ако функциите $u(x)$ и $v(x)$ се диференцијабилни функции на интервалот (a, b) , тогаш важи формулата за парцијална интеграција

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Доказ. Нека $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е примитивна функција на функцијата $u(x)v'(x)$ на интервалот (a, b) . Од дефиницијата на примитивна функција следува дека F е непрекината функција и за неа важи $F'(x) = u(x)v'(x)$, $x \in (a, b) \setminus A$, каде $A \subset (a, b)$ е дискретно подмножество. Поради диференцијабилноста на функциите $u(x)$ и $v(x)$ следува дека и функцијата $u(x)v(x)$ е непрекината на интервалот (a, b) .

Оттука следува дека и функцијата $G(x) = u(x)v(x) - F(x)$ е непрекината на интервалот (a, b) . Ако ја диференцираме, добиваме:

$$G'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x).$$

Следува дека функцијата $G(x)$ е примитивна функција на функцијата $u'(x)v(x)$ на интервалот (a, b) и притоа важи:

$$F(x) = u(x)v(x) - G(x).$$

Оттука се добива формулата $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$. ■

Формулата за парцијална интеграција можеме да ја запишеме и во обликот:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Изборот за функциите $u(x)$ и $v(x)$ не се врши според определени правила, туку интуитивно.

Ако изборот за функциите $u(x)$ и $v(x)$ е погрешен, наместо да го упрости интегралот, ќе го прави посложен за решавање во однос на почетниот.

Пример 1

Да ги решиме неопределените интеграли:

а) $\int x e^{-x} dx$; б) $\int \ln x dx$.

а) За решавање на интегралот под а) ќе искористиме парцијална интеграција на следниов начин:

Како u ќе го одбереме $u = x$. Со пресметување на прв извод, т.е. диференцирање добиваме $du = dx$. Остатокот од подинтегралниот израз е dv , значи $dv = e^{-x} dx$. Оттука со интегрирање добиваме $v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$.

Со замена во формулата за парцијална интеграција ќе имаме:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

б) За решавање на интегралот ќе искористиме парцијална интеграција на следниот начин: Како u ќе го одбереме $u = \ln x$. Со пресметување на прв извод, т.е. диференцирање добиваме $du = \frac{1}{x} dx$. Остатокот од подинтегралниот израз е dv , значи $dv = dx$. Оттука со

интегрирање добиваме $v = \int dx = x$.

Со замена во формулата за парцијална интеграција ќе имаме:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

1

Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x^2 e^x dx$; б) $\int x^2 \ln x dx$; в) $\int \frac{x}{e^x} dx$.

Пример 2

Да ги решиме неопределените интеграли:

а) $\int e^{x+\ln x} dx$ б) $\int (x^2 + x) \ln(x+1) dx$.

И двата интеграла ќе ги решиме со користење на методот на парцијална интеграција:

а) Ако $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x$ со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме:

$$\int e^{x+\ln x} dx = \int e^x e^{\ln x} dx = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

б) Ако во почетниот интеграл најпрво го користиме методот на замена. Со смената $x+1=t \Rightarrow dx=dt$, добиваме: $\int (x^2+x) \ln(x+1) dx = \int ((t-1)^2+t-1) \ln t dt = \int (t^2-t) \ln t dt$.

Понатаму со користење на методот на парцијална интеграција, за $u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt$,

$dv = (t^2-t) dt \Rightarrow v = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$, добиваме:

$$\begin{aligned} \int (t^2-t) \ln t dt &= \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \ln t - \int \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right) \frac{1}{t} dt = \\ &= \frac{2t^3-3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{3} \int t^2 dt + \frac{1}{2} \int t dt = \frac{2t^3-3t^2}{6} \ln t - \frac{1}{9} t^3 + \frac{1}{4} t^2 + C = \\ &= \frac{2(x+1)^3-3(x+1)^2}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2(x+1)-3)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} (x+1)^3 + \frac{1}{4} (x+1)^2 + C = \\ &= \frac{(x+1)^2 \cdot (2x-1)}{6} \ln(x+1) - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{6} x + C. \end{aligned}$$

2 Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x \ln(x^2-1) dx$; б) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.

Пример 3 Ќе ги решиме неопределените интеграли:

а) $\int x \sin x dx$; б) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$; в) $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$.

Користиме методот на парцијална интеграција.

а) Ако $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \sin x dx \Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$ со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

б) Ако $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$ со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Последниот интеграл се решава со метод на замена. Со користење на смената $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$ се добива:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x \operatorname{tg} x + \int \frac{1}{t} dt = x \operatorname{tg} x + \ln|t| + C = x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C.$$

в) Ја спроведуваме истата постапка како и кај претходните два интеграла т.е.

$u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \Rightarrow v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$. Забележуваме дека последниот интеграл

се решава со смена. Затоа со користење на смената $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$ се добива:

$v = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2\sin^2 x}$. Со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме:

$$\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right) + C.$$

3 Реши ги неопределените интеграла:

а) $\int x^2 \sin x dx$; б) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$; в) $\int (x^2 + 5x + 6) \cos x dx$.

Забелешка: Понекогаш е потребно користење на методот на парцијална интеграција неколку пати, додека интегралот се сведе на табличен интеграл.

Таков е и следниот пример:

Пример 4 Да го решиме неопределениот интеграл $\int e^{-x} \sin x dx$.

Ако $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$, $dv = \sin x dx \Rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$ со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме:

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx.$$

Се забележува дека е потребно да се примени повторно парцијална интеграција.

Ако $u = e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$, $dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x$ со замена во формулата за парцијална интеграција добиваме:

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx = \\ &= -e^{-x} \cos x - \left(e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx \right) = \\ &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx. \end{aligned}$$

Кај овој интеграл имаме ситуација каде истиот почетен интеграл се појавува и од десната страна, но со спротивен знак т.е.

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx.$$

Ако во равенството неопределениот интеграл од десната страна го префрлиме од левата страна, се добива:

$$2 \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x + C$$

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$



Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int e^x \cos x dx$; б) $\int \cos(\ln x) dx$; в) $\int e^{2x} \sin 3x dx$.

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x^2 e^{-x} dx$; б) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

2. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x \ln^2 x dx$; б) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$.

3. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int x^4 \cos x dx$; б) $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx$.

4. Реши ги неопределените интеграли:

а) $\int e^{2x} \cos 2x dx$; б) $\int e^x \cos x dx$.

5. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Да се решат неопределените интеграли:

а) $\int \sqrt[4]{x^3} dx$

б) $\int \frac{2}{x^5} dx$

в) $\int (3+x^3)^3 dx$

г) $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

д) $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

е) $\int \frac{x^3 + x - 2}{x^2 + 1} dx$.

2. Да се решат неопределените интеграли:

а) $\int \sqrt{3x-4} dx$

б) $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$

в) $\int \frac{dx}{2+3x^2}$

г) $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[4]{x+5}} dx$

д) $\int \frac{2x-3}{1-x} dx$

е) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

3. Да се решат неопределените интеграли:

а) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$

б) $\int (x^2-3)\sqrt[5]{x^3-9x} dx$

в) $\int \frac{x}{5+x^4} dx$

г) $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$

д) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$

е) $\int \operatorname{ctg} x dx$

ж) $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$

з) $\int \frac{1}{\sin x} dx$.

4. Да се решат неопределените интеграли:

а) $\int \frac{x^3}{x+3} dx$

б) $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx$

в) $\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \sin 3x dx$

г) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

5. Да се решат интегралите:

а) $\int x \ln^2 x dx$

б) $\int x \ln(x^2-1) dx$

в) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

г) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

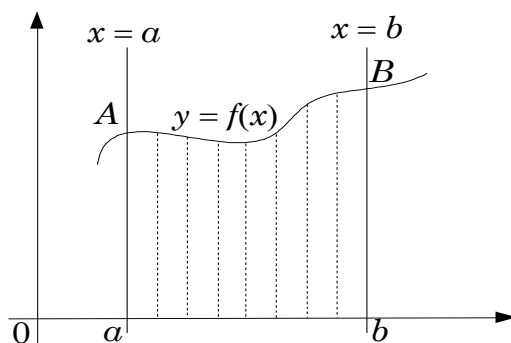
д) $\int x^4 \cos x dx$.

Модуларна единица 6 – Определен интеграл (за сите останати струки)

1. Поим за определен интеграл

Поимот определен интеграл е фундаментален поим во математиката и останатите технички науки. Прво да видиме кој проблем и која идеја довеле до поимот интеграл. Треба да нагласиме дека методот за пресметување интеграли постои многу пред методите за дифференцијално пресметување. Познато е дека античкиот математичар Архимед во 3 век пр. н. е. го користел методот за пресметување на интеграли. Нему му било познато дека параболата ја дели површината на правоаголникот чии две темиња се на параболата а другите две темиња лежат на x -оската, на две површини кои се однесуваат 2 : 1. Суштински до поимот на интеграл, довел проблемот за одредување на плоштина на криволиниски трапез. Прво ќе ја претставиме идејата, односно методот до кој дошле независно еден од друг големиот германски математичар Лајбниц и англискиот математичар Њутн кои живееле во втората половина на XVII и првата половина на XVIII век. Дефиницијата која ќе ја дадеме ја дал германскиот математичар Риман во XIX век, а ознаката што ќе ја користиме ја вовел францускиот математичар Фурие во XIX век.

Под криволиниски трапез го подразбираме делот од рамнината кој се наоѓа помеѓу x -оската, графикот на дадена ненегативна функција $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ правите $x = a$ и $x = b$ кои се паралелни со y -оската. Наша задача е да ја одредиме плоштината на криволинискиот трапез (слика 1). Идејата е да го поделиме интервалот $[a, b]$ на повеќе подинтервали, со што површината на криволинискиот трапез ќе ја поделиме на правоаголници, со кои приближно ќе ја пресметаме плоштината на криволинискиот трапез.

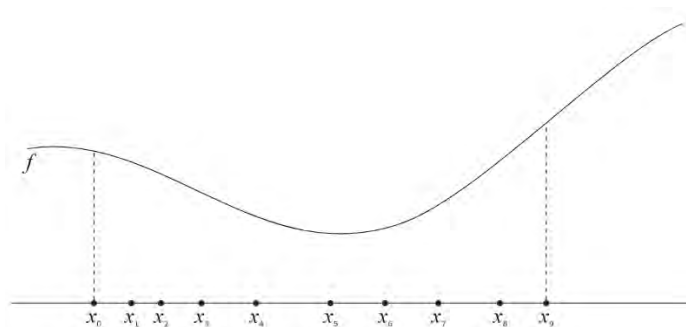


Слика 1

Дефиниција 1: Под поделба на сегментот $[a, b]$ подразбираме конечно множество од точки $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ така што

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

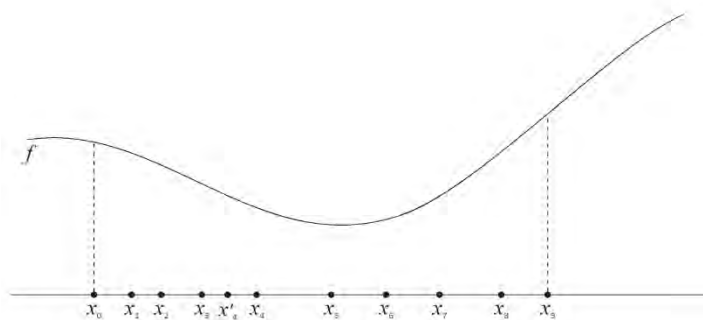
Значи овој сегмент $[a, b]$ го делиме на конечен број сегменти. Да ги разгледаме точките $a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 = b$, (слика 2)



Слика 2

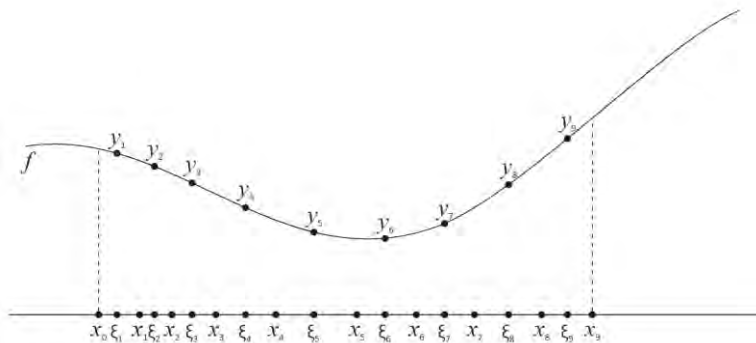
Со $\Delta_{x_i} = x_i - x_{i-1}$ ја означуваме должината на i -от сегмент. Значи ова се должините на сите сегменти. И го воведуваме поимот дијаметар на поделба што е еднаков на најголемата должина на некој потсегмент т.е. $d(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_{x_i}$.

Следно, ќе покажеме дека една поделба на сегмент P_1 е пофина од поделбата P_2 ако важи $P_2 \subset P_1$, т.е. поделбата P_1 содржи поголем број точки, од поделбата P_2 . Ова значи дека ако воведеме уште некоја точка на пример нека тоа биде точката x'_4 помеѓу точките x_3 и x_4 тогаш новата поделба ќе биде пофина од претходната поделба. (слика 3).



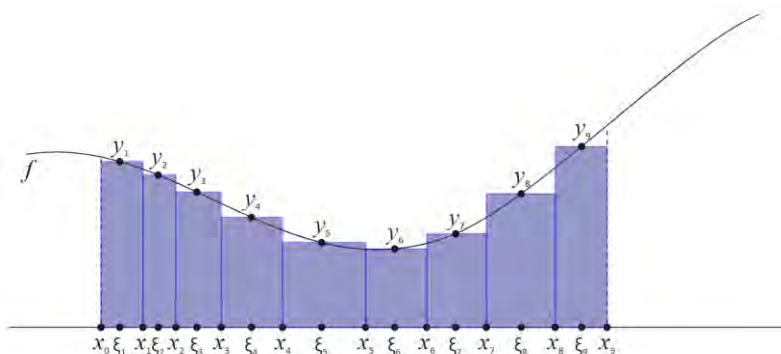
Слика 3

Значи поделбата е пофина доколку содржи повеќе точки од некоја друга поделба. Сега во секој од овие сегменти ќе избереме по една точка: $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Во нашиот пример тоа се точките $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_9$ (слика 4). Во овие точки ќе ја пресметаме вредноста на функцијата $y_i = f(\xi_i)$. Бидејќи функцијата f е непрекината во секоја точка од интервалот $[a, b]$, постои $f(\xi_i)$. Значи $y_1 = f(\xi_1), \dots, y_9 = f(\xi_9)$ и ќе ги означиме овие вредности на графикот на функцијата (слика 4).



Слика 4

Сега за секој сегмент ќе конструираме правоаголник со страни ξ_i и $f(\xi_i)$. Во нашиот пример ќе конструираме девет вакви правоаголници (слика 5).



Слика 5

Имаме дека должината на правоаголникот е еднаква на должината на соодветниот сегмент, а ширината на правоаголникот е еднаква на вредноста на функцијата во точките ξ_i . Правоаголниците да ги означиме со Π_i . Јасно е дека плоштината на секој правоаголник ќе биде еднаква на:

$$P(\Pi_i) = f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

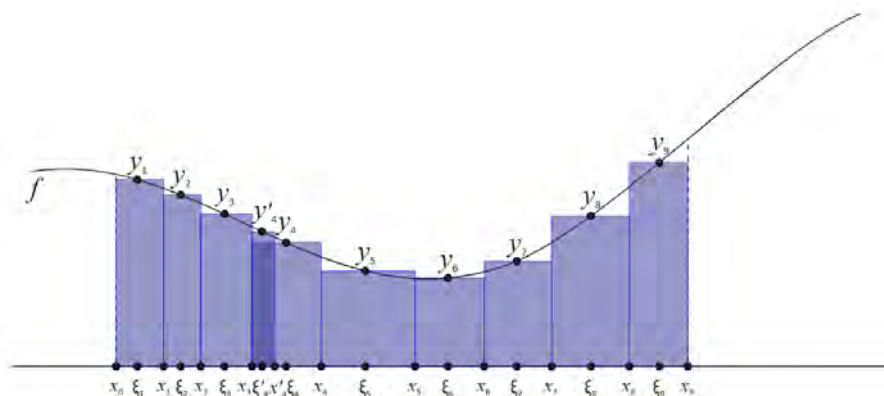
Збирот од плоштината на сите овие правоаголници може да се запише на следниот начин:

$$P(S) = f(\xi_1) \Delta_{x_1} + f(\xi_2) \Delta_{x_2} + \dots + f(\xi_n) \Delta_{x_n}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^9 f(\xi_i) \Delta_{x_i}.$$

Јасно е дека оваа плоштина зависи од изборот на точките ξ_i . Ако поместиме некоја од точките ξ_i тогаш ќе се промени и плоштината на соодветниот правоаголник. Но она што можеме да го тврдиме е дека плоштината на овој криволиниски трапез е приближно еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците.

Да видиме што ќе се случи ако пак ја додадеме точката x'_4 и на интервалот од x_3 до x'_4 избереме точка ξ'_4 и во оваа точка ќе ја одредиме и вредноста на функцијата y'_4 . Сега за сегментот од x_3 до x'_4 ќе конструираме правоаголник. Наместо правоаголникот на сегментот x_3 до x_4 ќе имаме два правоаголника од x_3 до x'_4 и од x'_4 до x_4 . (слика 6)



Слика 6

Да видиме што може да заклучиме ако во постоечката поделба вметнеме уште една точка. Најправо можеме да забележиме дека збирот од плоштините на сите овие правоаголници има поблиска (поточна) вредност со вредноста на плоштината на криволинискиот трапез. Друго што може да се заклучи е дека дијаметарот на новата поделба (пофината поделба) е помал или еднаков на дијаметарот на претходната поделба. Со други зборови колку повеќе точки вметнуваме во поделбата максималната должина на сегментите е сè помала и помала, но плоштината од сите правоаголници е сè поблиска до плоштината на криволинискиот трапез. Интуитивно сега е јасно, дека колку што дијаметарот на поделбата е помал, т.е. ако дијаметарот на поделбата тежи кон нула тогаш збирот од плоштината на овие правоаголници ќе се приближи произволно блиску до плоштината на криволинискиот трапез. Тоа не води до следната дефиниција.

Дефиниција 2: Нека е дадена функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, нека P е произволна поделба на сегментот $[a, b]$ и нека ξ_i се произволно избрани точки, по една од секој подсегмент, сумата

$$\sigma(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

се нарекува **Риманова интегрална сума** за функцијата f за дадена поделба P и избор на точки ξ_i .

Дефиниција 3: Функцијата $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ е интеграбилна во Риманова смисла, на сегментот $[a,b]$ ако постои реален број I така што важи:

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I$$

односно ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P)(\forall \xi_i)(d(P) < \delta \Rightarrow |\sigma(f) - I| < \varepsilon)$$

Бројот I го означуваме со:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

и означува **определен интеграл** од функцијата $f(x)$ од граница a до граница b .

Границата a ја нарекуваме **долна граница на интегралот**, додека граница b **горна граница на интегралот**. Функцијата $f(x)$ се нарекува **подинтегрална функција**, додека dx е диференцијал на непознатата x , односно ја означува должината на потсегментите во поделбата P .

Определениот интеграл всушност служи за пресметување на плоштина на криволиински трапез, но има и други примени во техниката и инженерството. Многу е важно да знаеме дека интеграл всушност е збир од бесконечно многу собироци. Оттука и ознаката за интеграл е „издолжено S “ што всушност означува сума. Да заклучиме, определен интеграл е гранична вредност на сума од бесконечно многу собироци.

Во продолжение ќе наведеме теорема без да ја докажуваме, која се однесува на својствата на интеграбилните функции и определените интеграли:

Теорема 1: Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ се интеграбилни функции на интервалот $[a,b]$ и нека $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогаш функцијата $\alpha f(x) + \beta g(x)$ е интеграбилна на интервалот $[a,b]$ и важат следните својства:

$$(1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$(3) \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

$$(4) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a,b).$$

Последната теорема се докажува едноставно со директна примена на дефиницијата за определен интеграл.

Пример 1 ➔ Да го пресметаме интегралот $\int_0^1 dx$.

Функцијата $f(x) = 1$ е непрекината на интервалот $[0, 1]$, од каде следува дека $\int_0^1 dx$ постои.

За да го пресметаме интегралот можеме да ја избереме следнава поделба:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Должината на секој од сегментите е $\frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Точките ξ_i ги избираме да бидат еднакви на вредноста на десната граница на сегментите, на пример за i -от сегмент $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ бираме $\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$. За соодветните суми σ добиваме:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Бидејќи $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = 1$, можеме да заклучиме дека $\int_0^1 dx = 1$.

Пример 2 ➔ Да го пресметаме интегралот $\int_0^1 x dx$.

Функцијата $f(x) = x$ е непрекината на интервалот $[0, 1]$, од каде следува дека $\int_0^1 x dx$ постои.

За да го пресметаме интегралот можеме да ја избереме следнава поделба:

$P: 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$. Должината на секој од сегментите е $\frac{1}{n}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Точките ξ_i ги избираме да бидат еднакви на вредноста на десната граница на сегментите, на пример за i -от сегмент $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ бираме $\xi_i = \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n-1$. За соодветните суми σ добиваме:

$$\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Бидејќи: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(f) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$

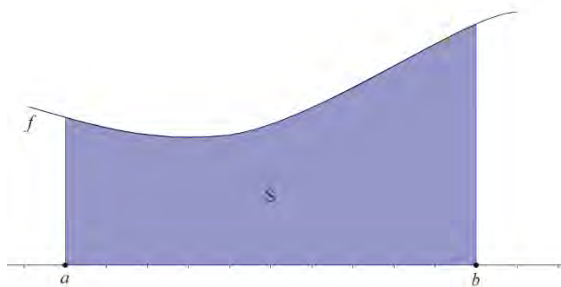
Од каде можеме да заклучиме дека $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$

Пресметувањето на определениот интеграл по дефиниција може да биде комплицирано. Во следната лекција ќе биде дадена Њутн-Лајбницова формула што го олеснува пресметувањето на определениот интеграл.

2. Основна теорема на интегрално сметање

Овде ќе ја разгледаме основната теорема на интегрално сметање позната и како Њутн-Лајбницова формула. Ќе ги разгледаме и својствата на определениот интеграл.

Кога го дефинираме определениот интеграл претпоставивме дека е дадена функција $f(x)$ која е непрекината и ненегативна на интервалот $[a, b]$. Исто така кажавме дека под определен интеграл ја подразбираме плоштината на криволинискиот трапез, кој е одреден со графикот на функцијата $f(x)$, x -оската и правите $x=a$ и $x=b$ (слика 7).



Слика 7

По дефиниција интегралот претставува сума од бесконечно многу мали плоштини на правоаголници:

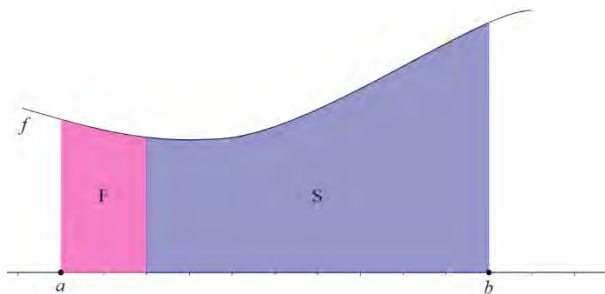
$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Нека за $x \in [a, b]$, ја дефинираме функцијата $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. За оваа функција важи дека е непрекината на интервалот $[a, b]$ и е примитивна функција на функцијата $f(x)$ на

интервалот $[a, b]$. Тоа значи дека функцијата $F(x)$ може да биде дефинирана и како

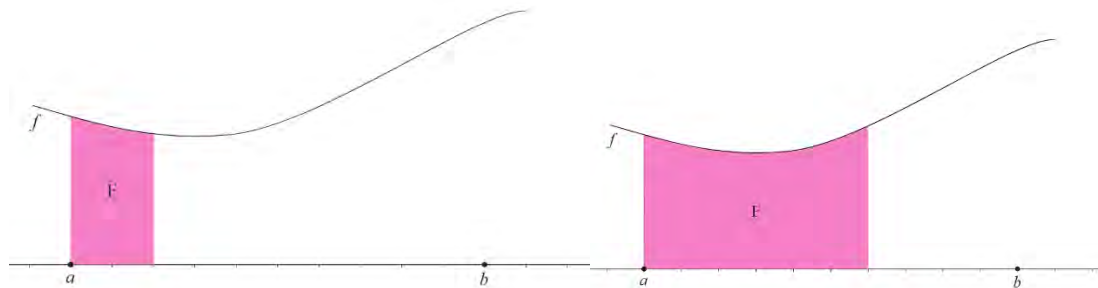
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + C, \text{ каде } C \text{ е произволна константа.}$$

Последното равенство значи дека определениот интеграл со граници од a до x од функцијата $f(t)$ (оваа функција е иста со $f(x)$ само со друга ознака на променливата) е функција која ја мери плоштината на овој криволиниски трапез кога $x \in [a, b]$ (слика 8).



Слика 8

Со F е определена плоштината на дел од криволинискиот трапез кога $x \in [a, b]$. Јасно се гледа дека доколку x го зголемуваме ќе се зголемува и плоштината F , ако x го намалуваме ќе се намалува и плоштината F (слика 9).

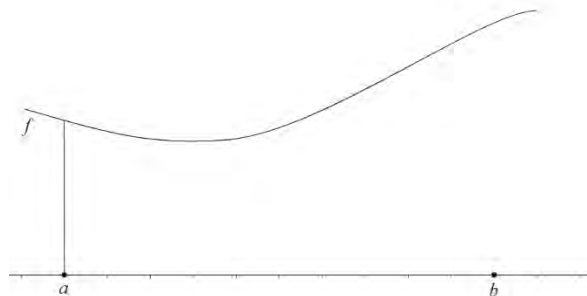


Слика 9

Од овде можеме да заклучиме дека функцијата $F(x)$ е растечка. Останува да ја одредиме вредноста на константата C . За таа цел ќе ставиме $x = a$ и добиваме:

$$F(a) = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C.$$

Јасно е дека ќе интегралот $\int_a^a f(t) dt$ ќе биде еднаков на 0, бидејќи наместо криволиниски трапез ќе имаме отсечка (слика 10).



Слика 10

Од друга страна ако ставиме дека $x=b$, добиваме дека:

$$F(b) = \int_a^b f(t) dt + C = S + C,$$

што значи дека плоштината F ќе биде еднаква на плоштината на целиот криволински трапез S (слика 7). Ако замениме дека $C = F(a)$ добиваме:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Последната формула е позната како **Њутн-Лајбницова формула**. Со тоа ја докажавме следната теорема.

Теорема 1: (Њутн-Лајбницова теорема) Ако функцијата f е непрекината на интервалот $[a, b]$ и ако F е која било нејзина примитивна функција, тогаш важи равенството:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Оваа теорема се нарекува **основна теорема на интегрално сметање**, а равенството (1) **основно правило на интегрално сметање** или **Њутн-Лајбницова формула**.

Њутн-Лајбницовата формула ја дава врската помеѓу неопределен и определен интеграл и со ова во голема мера се олеснува пресметувањето на определениот интеграл. За да го пресметаме определениот интеграл на функцијата f на интервалот $[a, b]$ доволно е да најдеме една нејзина примитивна функција F и да го пресметаме нејзиното нараснување на сегментот $[a, b]$. Значи пресметувањето на определен интеграл го сведуваме на наоѓање на некоја примитивна функција што е еквивалентно со пресметувањето на неопределениот интеграл.

Пример 1

Да пресметаме $\int_a^b x^n dx, n \in \mathbb{R}, 0 \notin [a, b]$.

Ќе разгледаме два случаи:

Кога $n \neq -1$, во овој случај $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, функцијата $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ е примитивна функција за функцијата x^n па добиваме:

$$\int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

За $n = -1$, добиваме $\int_a^b \frac{dx}{x}$, бидејќи $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ за $x > 0$ добиваме:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}.$$

1 Пресметај го определениот интеграл $\int_1^2 x^3 dx$.

Пример 2 Да ги решиме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 (3 - 2x) dx \quad \text{б) } \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx.$$

За решавање на определените интеграли ќе ја искористиме Њутн-Лајбницовата формула.

$$\text{а) } \int_0^2 (3 - 2x) dx = \left(3x - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^2}{2} \right) - \left(3 \cdot 0 - \frac{2 \cdot 0^2}{2} \right) = 6 - 4 = 2.$$

б) Прво ќе го решиме соодветниот неопределен интеграл:

$$\int \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \ln |x| + e^x + C.$$

Оттука за определениот интеграл ќе имаме:

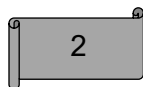
$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \left(\ln |x| + e^x \right) \Big|_1^3 = \ln 3 + e^3 - e.$$

в) Прво ќе го решиме соодветниот неопределен интеграл:

$$\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C.$$

Оттука за определениот интеграл ќе имаме:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = (-\cos x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$



Реши ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_1^2 \left(2x + 3e^x - \frac{4}{x} \right) dx; \quad \text{б) } \int_0^1 x^2 (x^3 + 1) dx; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2 \cos x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx.$$

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 x dx, \quad \text{б) } \int_1^3 x^2 dx, \quad \text{в) } \int_0^1 e^x dx,$$

$$\text{г) } \int_0^{\pi/2} \cos x dx, \quad \text{д) } \int_0^{\pi} \sin x dx, \quad \text{е) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\text{е) } \int_0^1 \sqrt{x} dx, \quad \text{ж) } \int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx.$$

2. Реши ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{x^4 + x^{-2} + 2}{x^3} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 (x-3)^3 dx; \quad \text{в) } \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - 3 \right) dx; \quad \text{г) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx.$$

3. Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 x^7 dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx.$$

3. Интеграција со смена кај определен интеграл

Според Њутн-Лајбницова формула пресметувањето на определен интеграл го сведуваме на наоѓање на некоја примитивна функција што е еквивалентно со пресметување на неопределен интеграл. Кај неопределен интеграл веќе го разгледавме методот на интеграција со смена, кој се сведува на формулата:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) d(\varphi(t)) = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Овде ја воведовме смената $x = \varphi(t)$.

Пример 1

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 (x+2)^3 dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^0 e^{x+1} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx.$$

а) Ја воведуваме смената $t = x + 2$, $dx = dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = -1 \Rightarrow t = -1 + 2 = 1$ и кога $x = 1 \Rightarrow t = 1 + 2 = 3$. Со воведената смена и пресметаните нови граници за новововедената променлива, интегралот го решаваме како:

$$\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx = \int_1^3 t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20.$$

б) Ја воведуваме смената $x + 1 = t$, $dx = dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = -2 \Rightarrow t = -2 + 1 = -1$ и кога $x = 0 \Rightarrow t = 0 + 1 = 1$. Оттука добиваме:

$$\int_{-2}^0 e^{x+1} dx = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big|_{-1}^1 = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e}.$$

в) Ја воведуваме смената $2x = t$, $dx = 2dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 = 0$ и кога $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Оттука добиваме:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin t dt = -2 \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right) = 2.$$

1

Пресметај го определениот интеграл:

$$\text{а) } \int_2^3 (2x-1)^3 dx; \quad \text{б) } \int_1^2 e^{2x+1} dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx.$$

Пример 2

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_4^5 \frac{dx}{x-3}; \quad \text{б) } \int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}; \quad \text{в) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx.$$

а) Ја воведуваме смената $t = x - 3$, $dx = dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = 4 \Rightarrow t = 4 - 3 = 1$ и кога $x = 5 \Rightarrow t = 5 - 3 = 2$. Оттука добиваме:

$$\int_4^5 \frac{1}{x-3} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

б) Ја воведуваме смената $t = 2x + 1$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Со воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = 0 \Rightarrow t = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ и кога $x = 2 \Rightarrow t = 2 \cdot 2 + 1 = 5$. Оттука добиваме:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \Big|_1^5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}.$$

в) За да го решиме интегралот $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx$, треба да го трансформираме користејќи дека

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \quad \text{Ја воведуваме смената } t = \cos x, \quad dt = -\sin x \, dx \Rightarrow dx = \frac{1}{-\sin x} dt. \quad \text{Со}$$

воведената смена ќе настане промена и во границите на определениот интеграл, кои се однесуваат на променливата. Новите граници се кога $x = 0 \Rightarrow t = \cos 0 = 1$ и кога

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{Оттука добиваме:}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \, dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = - \ln |t| \Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2

Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{a) } \int_0^1 \frac{dx}{(3x+1)^3}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{(4x-3)^2}; \quad \text{в) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx.$$

Пример 3

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{a) } \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx; \quad \text{б) } \int_0^9 x^3 \sqrt{1-x} \, dx.$$

а) Ја воведуваме смената $\sqrt{1+x} = t$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определениот интеграл. Новите граници се $x=0, t=1$ и $x=3, t=2$. И добиваме:

$$\int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx = 2 \int_1^2 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3}.$$

б) Ја воведуваме смената $t = \sqrt[3]{1-x}$, $t^3 = 1-x$, $dx = -3t^2 dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определениот интеграл. Новите граници се $x=1, t=0$ и $x=9, t=-2$. И добиваме:

$$\begin{aligned} \int_0^9 x^3 \sqrt[3]{1-x} \, dx &= \int_0^{-2} (1-t^3) t (-3t^2) dt = \int_0^{-2} (3t^6 - 3t^3) dt = \left(\frac{3t^7}{7} - \frac{3t^4}{4} \right) \Big|_0^{-2} = \frac{3(-2)^7}{7} - \frac{3(-2)^4}{4} \\ &= 3 \cdot 16 \left(-\frac{8}{7} - \frac{1}{4} \right) = \frac{48 \cdot (-39)}{28} = 66,85. \end{aligned}$$

3

Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{a) } \int_0^1 \sqrt[3]{2x+1} dx; \quad \text{б) } \int_2^4 \sqrt{2x-3} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 x^5 \sqrt{x+2} dx; \quad \text{г) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1-\cos x} dx.$$

Пример 4

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx; \quad \text{б) } \int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx.$$

а) Ја воведуваме смената $t = x^2 + 1$, $dt = 2x dx$. Исто така треба да ги смениме и границите на определените интеграл. Новите граници се $x=0, t=1$ и $x=1, t=2$. И добиваме:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{4}.$$

б) Ја воведуваме смената $x^2 - 5x + 6 = t$, $(2x-5) dx = dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определените интеграл. Новите граници се $x=-1, t=12$ и $x=0, t=6$. И добиваме:

$$\int_{-1}^0 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx = \int_{12}^6 \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_{12}^6 = \ln 6 - \ln 12 = \ln \left(\frac{6}{12} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln 2.$$

4

Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^3} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{3x^2+2}{x^3+2x+1} dx.$$

Пример 5

Да ги пресметаме определените интеграли:

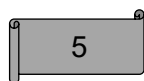
$$\text{а) } \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}; \quad \text{б) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x+3}}{\sqrt[3]{e^x+3}} dx.$$

а) Ја воведуваме смената $x-1=t^2$, $dx=2t dt$. Исто така треба да ги смениме и границите на определените интеграл. Новите граници се $x=1, t=0$ и $x=2, t=1$. И добиваме:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} &= \int_0^1 \frac{2t}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2+1+2t} dt = \int_0^1 \frac{2 \cdot (t+1)}{(t+1)^2} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{t+1} dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = 2 \ln(t+1) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

б) Ја воведуваме смената $t^6 = e^x + 3$, $6t^5 dt = e^x dx$. Исто така треба да ги смениме и границите на определениот интеграл. Новите граници се $x = 0, t = \sqrt[6]{4}$ и $x = \ln 2, t = \sqrt[6]{5}$. И добиваме:

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x \sqrt{e^x + 3}}{\sqrt[3]{e^x + 3}} dx = 6 \int_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} t^6 dt = \frac{6}{7} e^7 \Big|_{\sqrt[6]{4}}^{\sqrt[6]{5}} = \frac{6}{7} (5\sqrt[6]{5} - 4\sqrt[6]{4}).$$



Пресметај го определениот интеграл $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 2} dx$.

Во продолжение ќе дадеме некои својства кои може да ги користиме за полесно решавање на одредените интеграли.

1) Нека функцијата $f(x)$ е непарна функција, т.е. $f(-x) = -f(x)$, да го пресметаме сега интегралот:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Ќе го разгледаме прво интегралот $\int_{-a}^0 f(x) dx$. Ја воведуваме смената $t = -x, dt = -dx$, па

мора да ги смениме и границите на интегралот $x = -a, t = a$ и $x = 0, t = 0$. Добиваме

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{непарна функција}}{=} \int_a^0 -f(t)(-dt) = \int_a^0 f(t) dt \underset{\text{со менување на границите}}{=} - \int_0^a f(x) dx$$

и ако замениме во првиот интеграл добиваме:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Од овде можеме да заклучиме дека доколку подинтегралната функција е непарна, а интервалот на интеграција симетричен во однос на нулата, вредноста на интегралот е еднаква на нула.

Пример 6

Да докажеме дека $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$.

Функцијата $f(x) = x^3$ е непарна функција бидејќи $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Бидејќи интервалот на интеграција е симетричен во однос на нулата, вредноста на интегралот е нула. За овој интеграл лесно се проверува дека е еднаков на нула:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

2) Да разгледаме сега и друго својство кое исто така ќе ни помогне во решавање на определените интеграли. Нека $f(x)$ е парна функција, т.е. $f(-x) = f(x)$, да го пресметаме сега интегралот:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Прво ќе го разгледаме интегралот $\int_{-a}^0 f(x) dx$. Со воведување на смената $t = -x, dt = -dx$, потребно е да ги смениме и границите на интегралот $x = -a, t = a$ и $x = 0, t = 0$, добиваме

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 f(-t)(-dt) \underset{\text{парна функција}}{=} \int_a^0 f(t)(-dt) = \int_a^0 -f(x) dx \underset{\text{со менување на границите}}{=} \int_0^a f(x) dx.$$

Ако замениме во првиот интеграл добиваме:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Последната формула геометриски можеме да ја интерпретираме на следниот начин: доколку функцијата е парна нејзиниот график е симетричен во однос на y -оската, па затоа плоштината на фигурата помеѓу правите $x = -a$ и $x = 0$ е еднаква на плоштината на фигурата помеѓу правите $x = 0$ и $x = a$ од каде следува горната формула.

Пример 7

Да докажеме дека $\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$

Функцијата $f(x) = x^2$ е парна функција бидејќи $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. Бидејќи интервалот на интеграција е симетричен во однос на нулата, за вредноста на интегралот

$$\text{имаме: } \int_{-1}^1 x^2 dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

6

Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_{-2}^2 \frac{x^5}{2} dx$; б) $\int_{-3}^3 2x^4 dx$.

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ги следниве определени интеграли:

а) $\int_{-1}^1 (x+2)^3 dx,$

б) $\int_0^1 (3x+1)^2 dx,$

в) $\int_0^1 \frac{dx}{(3x+2)^2},$

г) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^3},$

д) $\int_1^4 \sqrt{x} dx,$

ѓ) $\int_2^{10} \sqrt{2x+5} dx,$

е) $\int_0^1 \sqrt[5]{(5x+1)^2} dx,$

ж) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx,$

з) $\int_{-1}^0 \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx,$

с) $\int_1^2 \frac{x}{9-x^2} dx,$

и) $\int_0^1 e^{2x+1} dx,$

ј) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x+2}}{\sqrt[3]{e^x+2}} dx$

к) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x;$

л) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx;$

љ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx.$

2. Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_{-1}^1 x^7 dx;$ б) $\int_{-2}^2 \frac{x^6}{3} dx.$

4. Парцијална интеграција на определен интеграл

Пресметувањето на определен интеграл го сведуваме на наоѓање на некоја примитивна функција што е еквивалентно со наоѓање на неопределен интеграл. Парцијалната интеграција најчесто се користи кога подитнегралната функција е логаритамска, експоненцијална или тригонометриска. Кај неопределен интеграл веќе го разгледавме методот на парцијална интеграција:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Оваа формула се прилагодува за определен интеграл и го добива обликот:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Пример 1

Да ги пресметаме определените интеграли:

$$\text{а) } \int_0^2 x e^x dx; \quad \text{б) } \int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx.$$

а) Со користење на парцијална интеграција $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, добиваме:

$$\int_0^2 x e^x dx = x e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 e^x dx = (2e^2 - 0e^0) - e^x \Big|_0^2 = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1.$$

б) Со користење на парцијална интеграција $u = x^2 - 5 \Rightarrow du = 2x dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$, добиваме:

$$\int_0^1 (x^2 - 5) e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (x^2 - 5) e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx.$$

За да го решиме интегралот $\int_0^1 x e^{-2x} dx$, повторно треба да примениме парцијална

интеграција, при што $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2x} \Big|_0^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} (e^{-2} - 1) \\ &= -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ако ова го замениме во првиот интеграл ќе добиеме:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx &= -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) + \int_0^1 x e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) - \frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{5}{4} e^{-2} \end{aligned}$$

в) Со користење на парцијална интеграција $u = x^2 + 3x - 1 \Rightarrow du = (2x + 3) dx$,
 $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$, добиваме:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx = (x^2 + 3x - 1) e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 (2x + 3) e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3) e^x dx.$$

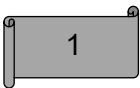
За да го решиме интегралот $\int_0^1 (2x + 3) e^x dx$, повторно треба да примениме парцијална

интеграција, при што $u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2dx$, $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$.

$$\int_0^1 (2x + 3) e^x dx = (2x + 3) e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e^x \Big|_0^1 = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1,$$

ако ова го замениме во првиот интеграл ќе добијеме:

$$\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx = 3e + 1 - \int_0^1 (2x + 3) e^x dx = 3e + 1 - (3e - 1) = 2.$$



Пресметај ги определените интеграли:

а) $\int_0^1 x e^{-x} dx$; б) $\int_1^2 (x^2 + 2x + 1) e^x dx$.

Пример 2

Да ги пресметаме определените интеграли:

а) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_2^4 x^3 \ln(2x) dx$; в) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$.

а) Ако го примениме правилото за парцијална интеграција имаме: $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$,

$dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, $v = 2\sqrt{x}$. Добиваме:

$$\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 4 \ln 4 - \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = 4 \ln 4 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 = 4 \ln 4 - 4 = 4 \cdot (\ln 4 - 1).$$

б) Со користење на парцијална интеграција имаме: $u = \ln 2x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = x^3 dx$, $v = \frac{x^4}{4}$.

Добиваме:

$$\begin{aligned} \int_2^4 x^3 \ln(2x) dx &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^4 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{1}{4} \int_2^4 x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 2x \Big|_2^4 - \frac{x^4}{16} \Big|_2^4 = \frac{1}{4} (4^4 \ln 8 - 2^4 \ln 4) - \frac{1}{16} (4^4 - 2^4) = 184 \ln 2 - 15. \end{aligned}$$

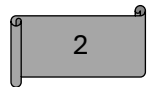
в) Со користење парцијална интеграција имаме: $u = \ln(x+1)$, $du = \frac{dx}{x+1}$, $dv = dx$, $v = x$.

Добиваме:

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = ((e-1) \ln e) - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= e-1 - \left[\int_0^{e-1} \frac{x+1}{x+1} dx - \int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} \right] = e-1 - \left[x \Big|_0^{e-1} - (\ln|x+1|) \Big|_0^{e-1} \right] = e-1 - [(e-1-0) - (\ln e - \ln 1)] = \\ &= e-1-e+1+\ln e = 1. \end{aligned}$$

г) Со користење парцијална интеграција имаме: $u = x \Leftrightarrow du = dx$,
 $dv = \sin x dx \Leftrightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$. Добиваме:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$



Пресметај ги определените интеграли:

$$\text{а) } \int_1^e x^2 \ln x; \quad \text{б) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^3} dx; \quad \text{в) } \int_0^{e-1} (x^2 + x) \ln(x+1) dx; \quad \text{г) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Пример 3

Да го пресметаме определениот интеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

Од парцијална интеграција имаме: $u = \ln^2 x$, $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$, $dv = \frac{1}{x^2} dx$, $v = -\frac{1}{x}$. Добиваме:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^e + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx,$$

За да го решиме интегралот $\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx$, повторно треба да примениме парцијална интеграција, при што ќе имаме:

$$u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = \frac{1}{x^2} dx, v = -\frac{1}{x}.$$

$$\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{e} - \frac{1}{x} \Big|_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = -\frac{2}{e} + 1,$$

ако ова го замениме во првиот интеграл ќе добиеме:

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x dx = -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{2}{e} + 1 \right) = -\frac{5}{e} + 2.$$

Задачи за самостојна работа

1. Да се пресметаат следниве интеграли:

а) $\int_0^1 (2x+1) e^x dx;$

б) $\int_1^2 (3x+5) e^{-x} dx;$

в) $\int_0^1 (x^2 + 3x - 1) e^x dx;$

г) $\int_0^1 (x^2 - 2) e^x dx;$

д) $\int_1^e \ln x dx;$

е) $\int_1^e x^2 \ln x dx;$

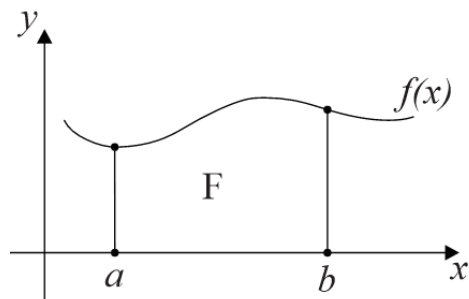
е) $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx;$

ж) $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx;$

з) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$

5. Площина на рамнински лик

Од дефиницијата на определениот интеграл видовме дека тој претставува плошина на криволиниски трапез кој е определен со графикот на ненегативната функција $f(x)$ и x -оската на интервалот $[a, b]$, (слика 11).

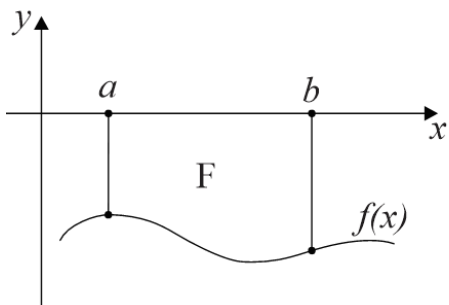


Слика 11

Значи за плоштината на криволинискиот трапез F од слика 11 имаме дека:

$$P(F) = \int_a^b f(x) dx.$$

Во случај кога функцијата $f(x)$ е негативна, вредноста на определениот интеграл ќе биде негативна (слика 12).



Слика 12

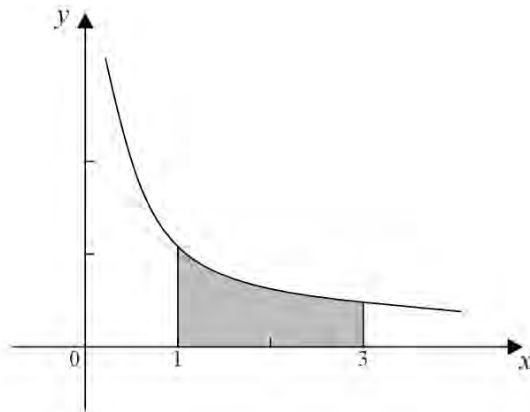
Значи за да ја пресметаме, плоштината на фигурата F во случај кога функцијата $f(x)$ е негативна, вредноста на определениот интеграл ќе ја ставиме во знак на апсолутна вредност, за да добиеме позитивен број, бидејќи плоштината не може да биде негативна.

$$P(F) = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Пример 1

Да ја пресметаме плоштината на фигурата, ограничена со кривата $y = \frac{1}{x}$, апсцисната оска и правите $x=1$ и $x=3$.

На слика 13 се прикажани кривата и двете прави:

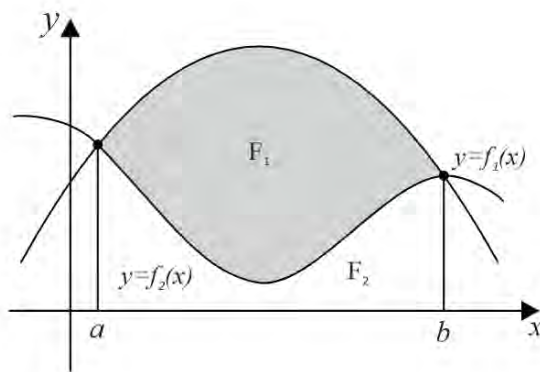


Слика 13

Според претходното објаснување, за да ја пресметаме плоштината на обоениот дел добиваме:

$$P = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

Да разгледаме сега како ќе ја пресметаме плоштината на фигура која е ограничена со графици на функциите $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на интервалот $[a, b]$, слика 14.



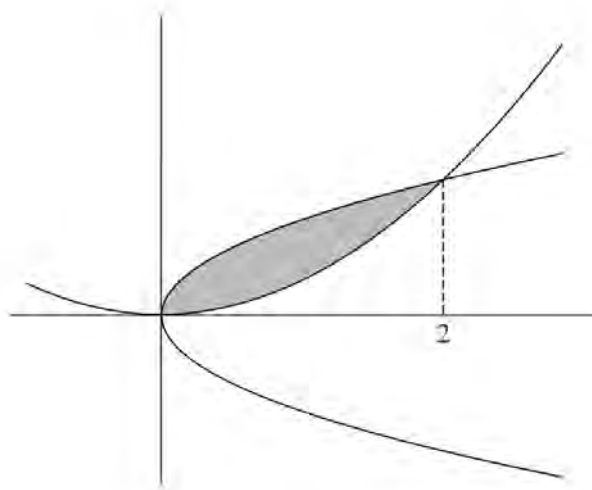
Слика 14

Ако со F_1 го означиме криволинискиот трапез под графикот на функцијата $f_1(x)$, а со F_2 го означиме криволинискиот трапез под графикот на функцијата $f_2(x)$ тогаш фигурата F може да се претстави како разлика на криволинискиот трапез F_1 со криволинискиот трапез F_2 . Од каде што можеме да заклучиме дека плоштината на фигурата F е еднаква на разликата на плоштината на криволинискиот трапез F_1 и плоштината на криволинискиот трапез F_2 т.е.

$$P(F) = P(F_1) - P(F_2) = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx.$$

Пример 2

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 15) ограничена со параболите $y^2 = 2x, x^2 = 2y$.



Слика 15

Параболите кои ја ограничуваат фигурата чија што плоштина треба да се определи се претставени на слика 15. Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интегрирање. Од $y^2 = 2x \Rightarrow y = \sqrt{2x}, y > 0$ тогаш

$\sqrt{2x} = \frac{x^2}{2}, 2x = \frac{x^4}{4}$. Од $x^4 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$. Значи пресечни точки се

$A(0,0), B(2,2)$. Плоштината на криволинискиот трапез ограничен со кривата $y^2 = 2x$ е

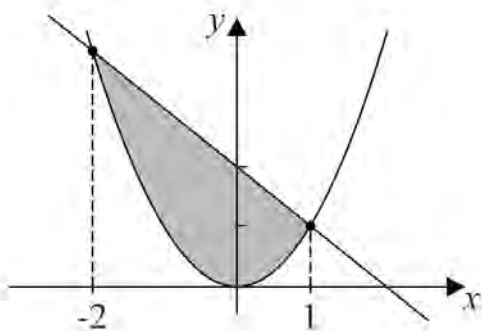
$F_1 = \int_0^2 \sqrt{2x} dx$. А плоштината на криволинискиот трапез ограничен со кривата $x^2 = 2y$ е

$F_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx$. Па плоштината на фигурата што ја бараме е $F = F_1 - F_2$, т.е

$$F = \int_0^2 \sqrt{2x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} - \frac{x^3}{6} \right) \bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Пример 3

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 16) ограничена со параболата $y = x^2$ и правата $x + y = 2$.



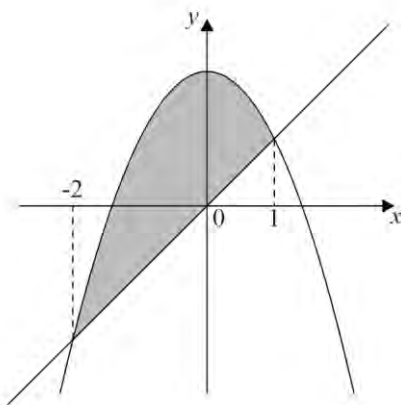
Слика 16

Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интервалот по кој интегрираме. Го заменуваме $y = x^2$ во $x + y = 2$ и ја добиваме квадратната равенка $x + x^2 = 2$. Со решавање на квадратната равенка $x^2 + x - 2 = 0$ се добива дека нејзини решенија се $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Значи пресечни точки се $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$. Плоштината на фигурата што ја бараме е:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Пример 4

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 17) ограничена со параболата $y = 2 - x^2$ и правата $y = x$.



Слика 17

Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интегрирање. Го заменуваме $y = x$ во $y = 2 - x^2$ и ја добиваме квадратната равенка

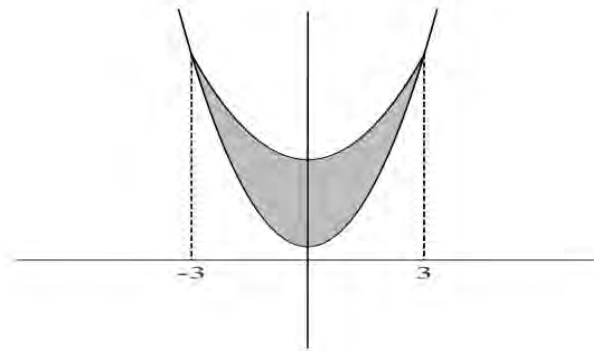
$x^2 + x - 2 = 0$. Со решавање на квадратната равенка се добива дека нејзини решенија се $x_1 = -2, x_2 = 1$, Значи пресечни точки се $A(-2, -2), B(1, 1)$.

Плоштината на фигурата што ја бараме е:

$$F = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx = 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

Пример 5

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 18) ограничена со параболите $y = 2x^2 + 1$ и $y = x^2 + 10$.



Слика 18

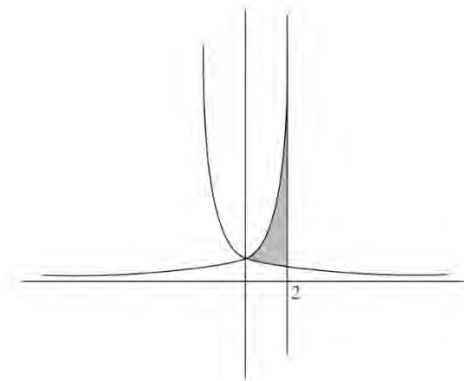
Најпрво ги наоѓаме координатите на пресечните точки што ги одредуваат границите на интегрирање. Ако ги изедначиме равенките добиваме $2x^2 + 1 = x^2 + 10 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 3$. Плоштината на фигурата што ја бараме е:

$$F = \int_{-3}^3 (x^2 + 10 - 2x^2 - 1) dx = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \left(-\frac{x^3}{3} + 9x \right) \Big|_0^3 = 36.$$

При решавањето користиме дека и двете функции се парни (симетрични во однос на y -оската).

Пример 6

Да ја пресметаме плоштината на фигурата (слика 19) ограничена со кривите $y = e^x, y = e^{-x}$ и правата $x = 2$.



Слика 19

Од слика 19 може да се види дека затемнетата површина од по x од 0 до 2 и дека горната крива е $y = e^x$, а долната крива е $y = e^{-x}$. Пресечните точки на двете криви можеме да ги добиеме и од:

$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{2x} = 1 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

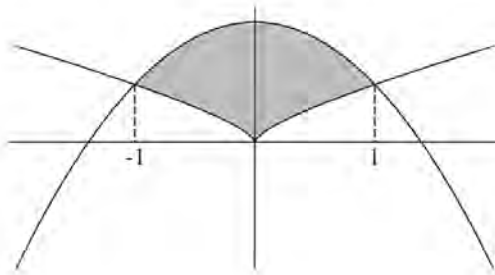
Оттука за плоштината имаме:

$$F = \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx = (e^x + e^{-x}) \Big|_0^2 = (e^2 + e^{-2}) - (e^0 + e^{-0}) = e^2 + \frac{1}{e^2} - 2.$$

Пример 7

Да се пресмета плоштината на фигурата (слика 20) ограничена со кривите

$$y = 2 - x^2, y^3 = x^2$$



Слика 20

Го наоѓаме пресекот на двете криви и ги добиваме пресечните точки $x_1 = -1, x_2 = 1$. Од слика

$$20 \text{ гледаме дека } F = \int_{-1}^1 \left(2 - x^2 - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \right) \Big|_{-1}^1 = 2 \frac{2}{15}.$$

Задачи за самостојна работа

1. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.
2. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = x^2 + x + 3$ и правата $y = x + 7$.
3. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.
4. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y = \frac{1}{1+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{2}$.
5. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ и правите $y = 0, x = e$.
6. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $y = \frac{1}{x^2}$ и правата $y = x$.
7. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ и правата $x = 1$.

6. Задачи за повторување на модуларната единица

1. Со примена на формулата на Њутн-Лајбниц, пресметај ги интегралите:

а) $\int_1^2 \sqrt[4]{x^3} dx,$

б) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx,$

в) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + x^3 \right) dx,$

г) $\int_0^1 (2x^4 + 3x^2 + 1) dx$

2. Со помош на интегрирање со смена пресметај ги интегралите:

а) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}},$

б) $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1 - e^{2x}} dx.$

$$\text{в)} \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\text{г)} \int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx.$$

3. Со помош на интегрирање со смена пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

4. Со помош на парцијална интеграција пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_0^1 \frac{2x+3}{e^x} dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

5. Со помош на парцијална интеграција пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_1^2 x \ln(2x^2 - 1) dx;$$

$$\text{б)} \int_1^2 (2x-1) \ln x dx.$$

6. Со помош на парцијална интеграција пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_0^{e-2} \ln(x+2) dx$$

$$\text{б)} \int_{-2}^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

7. Пресметај ги интегралите:

$$\text{а)} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx.$$

8. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривите $y=2x^2+1$ и $y=x^2+10$.

9. Пресметај ја плоштината на фигурата ограничена со кривата $y=2x-x^2$ и правата $x+y=0$.

Решенија:

Модуларна единица 1 – Диференцијално сметање

1.

1. а) $\Delta L = 2m, \Delta P = 10m^2$,

б) $\Delta L = 1m, \Delta P = 10m^2$.

2. а) $\Delta f = \frac{1}{11}$,

б) $\Delta f = 2$,

в) $\Delta f = 3$,

г) $\Delta f = 2$.

3. а) $y' = 4$,

б) $y' = 2x$ за $x_0 = 2, y'(2) = 2 \cdot 2 = 4$,

в) $y' = 2(x - 2)$ за $x_0 = 5, y'(5) = 2 \cdot (5 - 2) = 6$,

г) $y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ за $x_0 = 1, y'(1) = 2$.

4. а) $y'_+(3) = 1, y'_-(3) = -1$

б) $y'_+(-2) = 1, y'_-(-2) = -1$,

в) $y'_+(0) = 0, y'_-(0)$ не постои бидејќи за $x < 0$, функцијата не е дефинирана

г) $y'_+(5) = \infty, y'_-(5) = -\infty$

2.

1. а) $y' = 5x^4$, б) $y' = \frac{7}{3}x\sqrt[3]{x}$, в) $y' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$, г) $y' = -\frac{5}{x^6}$,

2. а) $y' = \frac{11}{2}x^4\sqrt{x}$, б) $y' = -\frac{7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$, в) $y' = \frac{6}{5}\sqrt[5]{x}$, г) $y' = -\frac{1}{5x^5\sqrt{x}}$.

3.

1. а) $f'(x) = 4x$, б) $f'(x) = -\frac{1}{8\sqrt[4]{x^3}}$, в) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, г) 2

2. а) $f'(x) = 4x + 5$, б) $f'(x) = x^2 - x^4 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5}$,

в) $f'(x) = 1 + x + x^2$, г) $f'(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. а) $f'(x) = 14x^2\sqrt{x} - \frac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}$; б) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$.

4. а) $f'(x) = \frac{1}{x} + e^x - 5$, б) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 5 \cdot 4^x \ln 4$,

5. а) $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$, б) $f'(x) = x^2 e^x (3 + x)$.

6. а) $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$, б) $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2 + 1)^2}$,

в) $f'(x) = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$, г) $f'(x) = \frac{x(2 - x)}{x^2}$.

4.

1. а) $y' = 5(2x^2 + 5x - 6)^4 (4x + 5)$, б) $y' = 8(x^5 + 2x)^7 (5x^4 + 2)$,

в) $y' = 5(5x^5 + 3x^3 + 1)^4 (25x^4 + 9x^2)$, г) $y' = 6m(mx + n)^5$.

2. а) $y' = 12x^2 - 16x - 35$, б) $y' = (x + 2)(x^2 - 3x + 1)^2 (8x^2 - 3x - 16)$.

3. а) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, б) $y' = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2 - 1)^2}}$.

4. а) $y' = 2e^{2x+5}$, б) $y' = xe^{\sqrt{x}} \left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right)$.

5.

1. а) $y' = -\frac{2xy}{x^2 + 2y}$, б) $y' = -\frac{x + 2y}{2x + y}$, в) $y' = -\frac{2 + y^2}{1 + 2xy}$, г) $y' = -\frac{3x^2 + y^3}{3xy^2}$.

2. а) $y' = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} \right)$, б) $y' = 2x^{2x} (\ln x + 1)$,

в) $y' = \left(\frac{1 + x^2}{x} \right)^x \left[\ln \left(\frac{1 + x^2}{x} \right) + \frac{x^2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^3} \right]$, г) $y' = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$.

6.

1. а) $dy = (1 - x) \cdot e^{-x} dx$ б) $dy = (1 - x^2) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

2. а) 1,0001; б) 0,001; в) 3,00005.

7.

1. а) $y' = 2t^2$; б) $y' = \frac{t+5}{t}$.

2. а) $y' = \frac{3(e^t + e^{-t})}{5(e^t - e^{-t})}$; б) $y' = \frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{t})^2}}{\sqrt[6]{t}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}$.

8.

1.

а) равенка на тангента $2x - y + 1 = 0$

равенка на нормала $x + 2y - 7 = 0$

б) равенка на тангента $24x - y + 33 = 0$

равенка на нормала $x + 24y + 362 = 0$

2. Точките на пресек се $A(2, 0)$ и $B(-2, 0)$

$A(2, 0)$

равенка на тангента $4x + y - 8 = 0$

равенка на нормала $x - 4y - 2 = 0$

$B(-2, 0)$

равенка на тангента $4x - y + 8 = 0$

равенка на нормала $x + 4y + 2 = 0$

3. Точките на пресек е $A(3, 8)$

равенка на тангента $6x - y - 10 = 0$

равенка на нормала $x + 6y - 51 = 0$

4. Точките на пресек се $A\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$ и $B\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{27}\right)$

$A\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

равенка на тангента $x - 2y + 9 = 0$

равенка на нормала $8x + 4y + 9 = 0$

$B\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{27}\right)$

равенка на тангента $27x - 54y + 10 = 0$

равенка на нормала $108x + 54y + 5 = 0$

9.

1. а) $y'' = 4e^{2x-3}$, б) $y'' = \frac{2(x^2 + 2x) - (2x + 2)^2}{(x^2 + 2x)^2}$, в) $y'' = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$,
 г) $y'' = 4$, д) $y'' = -\frac{3}{16x^4\sqrt{x}}$,
 е) $y'' = 3x^2 - 2x + 2$, е) $y'' = x(6 \ln x + 5)$.
 2. а) $y'' = 6(1 - x)$, б) $y'' = \frac{2(2x^4 + 8x^3 + 13x^2 + 10x + 3)}{(x + 1)^3}$.

10.

2. а) расте за секое $x \in \mathbb{R}$, нема екстремни вредности,
 б) минимум за $x = \frac{5}{2}$, $y_{\min} = -3\frac{1}{4}$,
 в) максимум за $x = 1$, $y_{\max} = \frac{1}{5}$, минимум за $x = 3$, $y_{\min} = -5\frac{2}{5}$,
 г) $y' = 3(x - 2)^2 > 0$, расте за секое $x \in \mathbb{R}$, нема екстремни вредности,
 д) минимум за $x = \frac{3}{4}$, $y_{\min} = -\frac{27}{256}$,
 е) два минимума $x = 1$, $y_{\min} = 2$ и $x = -1$, $y_{\min} = 2$,
 ж) максимум за $x = -2$, $y_{\max} = 4e^{-2}$, минимум за $x = 0$, $y_{\min} = 0$,
 ж) минимум за $x = 1$, $y_{\min} = 1$,
 з) максимум за $x = 1$, $y_{\max} = \frac{1}{3}$, минимум за $x = -1$, $y_{\min} = -1$,
 с) максимум за $x = -7$, $y_{\max} = -14$, минимум за $x = -1$, $y_{\min} = -2$,
 и) максимум за $x = \frac{\pi}{4}$, $y_{\max} = \sqrt{2}$, минимум за $x = \frac{5\pi}{4}$, $y_{\min} = -\sqrt{2}$.
 3. а) $a = 1$; б) $a = \frac{1}{2}$.
 4. $a = 2$, $b = -3$.

11.

1.

- а) За $x \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$ функцијата е конкавна, а за $x \in \left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$ функцијата е конвексна,
 б) Функцијата е конкавна во $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, а конвексна во $\left(0, \frac{1}{2}\right)$,
 в) Функцијата е конкавна во $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$, а конвексна во $(0, 1)$,

г) Функцијата е конкавна во $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$, а конвексна во $(-1, 1)$.

2. (под а) $y = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$ у задачата да се додаде $x \neq -1$)

а) нема превојни точки,

б) превојни точки се $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$ и $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

3.

а) Функцијата е конкавна во $(-1, 0)$ и $(1, \infty)$, а конвексна во $(-\infty, -1)$ и $(1, 0)$.

Превојна точка е $(0, 0)$,

б) Функцијата е конкавна во $(-1, \infty)$, а конвексна во $(-\infty, -1)$. Нема превојна точка,

в) Функцијата е конкавна во $(-\infty, -3.41)$ и $(-0.58, \infty)$, а конвексна во $(-3.41, -0.58)$.

Превојни точки се $(-3.41, 0.38)$ и $(-0.58, 0.19)$,

г) Функцијата е конкавна во $(2, \infty)$, а конвексна во $(-\infty, 2)$. Превојна точка е $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$,

д) Функцијата е конкавна во $\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, \infty\right)$, а конвексна во $\left(0, \frac{1}{e\sqrt{e}}\right)$. Превојна точка е

$$\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}, -\frac{3}{2e^3}\right),$$

ѓ) (кај задачите $y = x \ln^2 x$, $x > 0$.) Функцијата е конкавна во $\left(\frac{1}{e}, \infty\right)$, а конвексна во

$$\left(0, \frac{1}{e}\right). \text{ Превојна точка е } \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right),$$

13.

1. $a = 7.5, b = 7.5, a \cdot b = 56.25$

2. $a = 108, b = 72, 2a^2 + 3b^2 = 38880$

3. $a = 5, b = 2, P = 10$

4. $a = 7.06, b = 5.06, h = 1.47, V = 58.12$

5. Рамностран триаголник со страна $a = 5, P = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

6. Коцка со страна $a = 7.94, P = 378$

7. $P = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

8. $r = 6\sqrt{2}, H = 24, s = 18\sqrt{2}, P = 288\pi$

Модуларна единица 2 – Интегрално сметање

1. 1. a) $F(x) = \ln x$ б) $F(x) = \sqrt{x} + 3$
4. a) $F(x) = x^3 + 2$ б) $F(x) = e^x + 1$
2. 1. a) $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}^x}{\ln \sqrt{3}} + C$; б) $x + \ln x + C$; в) $\sqrt{x} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \right) + C$; г) $\frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} + C$; д) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[4]{x^3} + C$; е) $8x + 4x^3 + 6\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C$.
3. 1. a) $\frac{(x^2 - 13)^{24}}{48} + C$; б) $\frac{(x^3 - x^2 + x - 9)^8}{8} + C$; в) $\ln x^2 + 3x - 10 + C$. 2. a) $\frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3 - 9x)^6} + C$; б) $-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} + C$; в) $\frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3 + 27} + C$. 3. a) $\ln e^x + x + C$; б) $-\frac{1}{4 \ln^4 x} + C$; в) $\frac{2}{3} \sqrt{\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3} + C$.
4. 1. a) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$; б) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + C$. 2. a) $\frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$; б) $\frac{1}{2}(x^2 - 1) \ln x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2 + C$.
6. 1. a) 2 б) $8\frac{2}{3}$ в) $e - 1$ г) $\frac{2}{3}$ д) $\frac{1}{2}$ е) $\frac{3}{5}$ 2. a) $\ln 2 - \frac{5}{4}$; б) $-\frac{65}{4}$; в) $\ln \frac{3}{2} - 3$; г) $e^4 - e + \frac{14}{3}$. 3. a) 0; б) $\frac{256}{21}$.
7. a) 20 б) 7 в) $\frac{1}{10}$ г) $\frac{3}{8}$

д) $\frac{14}{3}$ е) 1.61 з) $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ и) $\frac{1}{2}e(e^2 - 1)$	р) $32\frac{2}{3}$ ж) $13\frac{1}{3}$ с) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$ й) $6\sqrt[6]{7} - \frac{18\sqrt[6]{3}}{7}$
8. а) $1+e$ в) 2 д) 1 е) $\frac{2e\sqrt{e}}{9}$	б) $\frac{11e-14}{e^2}$ г) $-\frac{3}{e}$ р) $\frac{1}{9}(1+2e^3)$ ж) $\ln 2 - \frac{1}{2}$
9. 1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{32}{3}$ 3. $3-e$ 4. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ 5. $\frac{1}{3}$ 6. $\frac{7}{6}$ 7. $e + \frac{1}{e} - 2.$	
10. 1. $\frac{4ab^2\pi}{3}$	

2. $\frac{\pi}{3}$

3. π

4. $\frac{2\pi}{3}$

5. $\frac{44\pi}{3}$

Модуларна единица 3 – Матрици (за сите струки)

1.

1. а) $-2\sin 2x$; б) $pq(q-p)$; в) $2p^2$; г) 0; д) $nmp + 2nm + 2mp + 2np$; ф) 0.

2. а) 6; б) -127; в) 15.

3. а) $x_1 = -1, x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$; б) $x_1 = 0, x_2 = 6$; в) $x_1 = -3, x_2 = -2, x_3 = 2\frac{1}{2}$; г) $x = 0$.

4. а) $[-2, 2]$; б) $(-\infty, -6] \cup [-3, +\infty)$.

2.

2.а) 0, б) 0, в) 0, г) 0.

4.а) 5; б) 4; в) -7.

3.

1. а) (1,3,-2); б) нема решение; в) бесконечно многу решенија; г) (1,5,1).

2. а) (0,0,0); б) $M = \{(-t, 10t, 7t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

3. а) $m \neq 1 \wedge m \neq -2$ единствено, $m = 1$ бесконечно многу и $m = -2$ нема решение;
б) $m \neq -8$ единствено и $m = -8$ бесконечно многу решенија.

4. а) $(1, -\frac{1}{2}, 1)$; б) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

4.

1. $x = -1, y = 2, z = -3, u = 4$;

2. $A^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

3. За $a = 2c$, при произволно c .

4. а) А е горно и долготриаголна, скаларна и симетрична матрица;
б) В е горно и долготриаголна, дијагонална и симетрична матрица;
в) С е горнотриаголна матрица;

г) A е горно и долнотриаголна, скаларна и симетрична матрица т.е единечна матрица од ред 3.		
5.		
1.a) $\begin{bmatrix} 28 & -9 & 12 & -6 \\ 4 & -12 & 15 & 6 \end{bmatrix};$	б) $\begin{bmatrix} -25 & 2 \\ 9 & 6 \\ -12 & -6 \\ -5 & -3 \end{bmatrix};$	в) $\begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 12 & -12 \\ 15 & 22 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$
3.a) $\begin{bmatrix} -4 & -98 & 135 \\ 12 & 7 & -38 \\ -21 & -54 & 92 \end{bmatrix};$	б) $\begin{bmatrix} 33 & -30 & 15 \\ 18 & 44 & -66 \\ -4 & 183 & -159 \end{bmatrix};$	в) $\begin{bmatrix} -283 & 52 & 38 \\ 196 & -124 & -206 \\ 240 & 32 & 112 \end{bmatrix}.$
5. DA, BC, CD, CA.		
6.		
1.a) $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix};$	б) $B^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix};$	в) $C^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$
2.a) $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 21 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix};$	б) $B^{-1} = -\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 19 & -14 & -17 \end{bmatrix};$	в)
$C^{-1} = \frac{1}{43} \begin{bmatrix} 10 & 13 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ -47 & 31 & 27 \end{bmatrix}.$		
7.		
1.a) $X = \begin{bmatrix} 70 & 63 \\ 42 & 847 \end{bmatrix};$	б) $X = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 15 & -19 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}.$	
2.a) $X = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 37 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$	б) $X = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 30 & 25 & 91 \\ 0 & 50 & -40 \\ 0 & 25 & 25 \end{bmatrix}.$	
8.		
1.(1, 3,-2); 2. (2,-1,3); 3. (3,-2,1); 4. (1,5,1).		
9.		
1.(1, 3,-2); 2. (2,-1,3); 3. (3,-2,1); 4. (1,5,1);		
5. нема решение; 6. бесконечно многу решенија.		
10.		
1. а) b^2 ; б) 40;		
3. $(\frac{3}{2}, \frac{9}{10}, -\frac{7}{10}).$		

4. а) $\begin{bmatrix} -10 & -11 & -30 \\ -3 & -2 & 27 \\ 1 & 1 & -8 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; г) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

5. а) $\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 22 & 14 \\ -29 & 18 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

7. $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$.

8. (1,0,-2).

9. а) За $a \neq 1, a \neq -2$ определен, за $a = 1$ неопределен и за $a = -2$ противречен.
б) За $a \neq 0$ определен со решение $(1-a, a, 0)$; б) за $a = 0$ неопределен.

10. а) противречен; б) неопределен; в) неопределен; г) (0,0,0); д) $(-\frac{5}{11}, -\frac{8}{11}, \frac{4}{11})$; е) (1,0,-4).

Модуларна единица 4– Аналитичка геометрија во простор

1.

1.а) $5\sqrt{3}$; б) 21; в) $10(5\sqrt{3} - 6)$.

2. 110, 89° .

5.а) 17; б) $\sqrt{14}, \sqrt{29}$; в) 33° .

6.а) 45° ; б) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.

7. (0,3,6), (0,-3,-6).

2.

1.а) 8; б) 16; в) 80.

2. $4\sqrt{2}$.

3. 15 квадратни единици.

5. а) (-9,-11,-3); б) (-18,-22,-6); в) (-90,-110,-30).

6. $\sqrt{13}$.

7. 0,8689.

3.

3. $12\sqrt{2}$;

4. 343 кубни единици.

5. $\frac{3\sqrt{41}}{41}$ единици.

6. $S_1(\frac{35}{12}, 0, 0), S_2(\frac{5}{12}, 0, 0)$. 7. $m_1 = 2, m_2 = -4$.
4. 1. $5x + 2y - 3z - 58 = 0$; $P, Q \notin \Sigma, R \in \Sigma$. 2. $x - 3z - 11 = 0$. 3. а) минува низ координатниот почеток; б) паралелна со Z - оската; в) минува низ y-оската; г) равенка на Oyz - рамнина; д) паралелна со x-оската. 4. $x = 5$. 5. $3x - z = 0$.
5. 1. а) $\vec{r} \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}) - 10 = 0$; б) $\vec{r} \cdot (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) - 4 = 0$. 2. $\vec{r} \cdot (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) - 5 = 0$. 3. $\vec{r} \cdot (-\frac{15\sqrt{538}}{538}, \frac{13\sqrt{538}}{538}, \frac{12\sqrt{538}}{538}) = 0$. 4. а) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2 = 0$; б) $\frac{\sqrt{14}}{14}x - \frac{\sqrt{14}}{7}y + \frac{3\sqrt{14}}{14}z - \frac{\sqrt{14}}{7} = 0$. 5. а) не; б) не; в) да. 6. а) $p = \frac{5}{6}, \vec{n}_0 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$; б) $p = 3, \vec{n}_0 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
6. 1. а) $a = 10, b = -\frac{20}{3}, c = -4$; б) $a = -\frac{15}{7}, b = -3, c = -\frac{15}{4}$. 2. $x - 6y - 2z + 2 = 0$; 3. а) $x + y + z - 6 = 0$; б) $15x + 4y + 4z + 35 = 0$. 4. $m = 1$. 5. $m = 14$. 6. $m = -7$. 7. $V = 45$.
7. 1. а) $13x - 7y - 2z + 1 = 0$; б) $15x - 3z - 19 = 0$. 2. а) точките не се компланарни; б) $2x + y - z - 3 = 0$. 3. $3x + 6y - 2z - 15 = 0$; ниту една.
8. 1. а) се совпаѓаат; б) паралелни; в) се сечат под агол $\alpha \approx 16^\circ$.

2. $x+3y+2z=0$. 3. $2x-3y-5z-5=0$. 4. $x-y+z-11=0$.
9. 1. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. 2. $A(0,0,-\frac{1}{3}), B(0,0,\frac{5}{9})$. 3. $\frac{\sqrt{14}}{7}$. 4. $\frac{26\sqrt{278}}{139}$. 5. $A(0,8,0), B(0,-10,0)$.
10. 1. $\frac{x-1}{-1} = \frac{z+2}{2}, y-2=0; x=1-t, y=2, z=2t-2$. 2. $\frac{x-3}{-3} = \frac{y+5}{-2} = z+7; x=3-3t, y=-5-2t, z=t-7$. 3. $110x+10z+7=0$. 4. $3x-y-2z=0$. 5. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{4}$. 6. $\frac{x+1}{-1} = y-2 = \frac{z+3}{11}, \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{9}, \frac{x}{2} = y-4 = \frac{z-6}{2}$. 7. $\frac{x+1}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{10}, \frac{x+2}{6} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+6}{-1}, \frac{x+3}{7} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{10}, \frac{x-5}{6} = \frac{y+6}{-8} = \frac{z-4}{-1}$.
11. 1. $M(\frac{16}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{20}{9}), \alpha \approx 22^\circ$. 2. Правата лежи в рамнината. 3. $\Sigma: x+2y+z=0, M(\frac{6}{7}, \frac{1}{3}, -\frac{11}{6})$. 4. $\Sigma: x-2y+z=0$. 5. $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-4}{-3}, M(1,1,1)$.
12. 1. а) паралелни; б) разминувачки. 2. $x-1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}$. 3. $\lambda = -2, \alpha \approx 60^\circ, M(-3,5,-5)$.

4. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. 5. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{-7}$.
13. 1. $\frac{28\sqrt{17}}{17}, \frac{14\sqrt{13}}{13}, \frac{28\sqrt{89}}{89}$. 2. $\frac{2\sqrt{30}}{3}$. 3. $\sqrt{13}, \frac{\sqrt{10010}}{35}$. 4. $\frac{37\sqrt{166}}{166}$. 5. а) $\frac{3\sqrt{35}}{7}$.
14. 1. $\frac{85}{12}$. 2. $x - z = 0$. 3. $8x - 17y = 0$. 4. $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ 5. $x \pm \sqrt{2}y + 3z - 6 = 0$. 6. $a = 5, b = -12$. 7. $\sqrt{42}$. 8. $x + 1 = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+4}{6}, \alpha \approx 53^\circ$. 10. $\frac{13\sqrt{2}}{6}$.

Модуларна единица 5 – Неопределен интеграл

2. 1. а) $\frac{x^{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}^x}{\ln \sqrt{3}} + C$; б) $x + \ln x + C$; в) $\sqrt{x} \left(\frac{2}{5}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \right) + C$; г) $\frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} + C$;	3. 1. а) $\frac{(x^2 - 13)^{24}}{48} + C$; б) $\frac{(x^3 - x^2 + x - 9)^8}{8} + C$;
---	--

д) $\frac{2a^x}{\ln a} + \operatorname{ctgx} + C$; р) $\ln x^2 + 3x - 10 + C$. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[4]{x^3} + C$; е) $2. \text{ а) } \frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3 - 9x)^6} + C$; б) $-\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} + C$; в) $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3 + 27} + C$. $8x + 4x^3 + 6\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C$. 2. а) $-\cos x - \sin x + C$; б) $-\operatorname{ctgx} + \cos x + C$; в) $\operatorname{tgx} - \operatorname{ctgx} + C$; г) $\frac{x^2}{6} + 4\cos x + 5\sin x + C$; д) $-\operatorname{ctgx} + C$.	3. а) $\ln e^x + x + C$; б) $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C$; в) $\frac{2}{3}\sqrt{\left[\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]^3} + C$. 4. а) $\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C$; б) $\ln \sin^2 x + 3 + C$; в) $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{4}{7}\sqrt{\sin^7 x} + \frac{2}{11}\sqrt{\sin^{11} x} + C$; г) $\ln\left \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right + C$
4. 1. а) $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$; б) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2 + 1) + C$. 2. а) $\frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$; б) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln x^2 - 1 - \frac{1}{2}x^2 + C$. 3. а) $\sin x(x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x(4x^3 - 24x) + C$; б) $\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}\ln 1-x^2 + C$. 4. а) $\frac{\cos 2x + \sin 2x}{4}e^{2x} + C$;	
5. 1. а) $\frac{4x^4\sqrt{x^3}}{7} + C$ б) $-\frac{1}{2x^4} + C$ в) $27x + \frac{27x^4}{4} + \frac{9x^7}{7} + \frac{x^{10}}{10} + C$ г) $\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{24}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$ д) $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C$ е) $\frac{x^2}{2} - 2\operatorname{arctgx} + C$ е) $-\operatorname{ctgx} - x + C$ 2. а) $\frac{2\sqrt{(3x-4)^3}}{9} + C$ б) $-\frac{2}{15\sqrt{(5x-2)^3}} + C$ в) $\frac{1}{\sqrt{x}}\arctan x\sqrt{\frac{2}{3}} + C$	

$$\begin{aligned} & \text{г) } \frac{4}{11} \sqrt[4]{(x+5)^{11}} - \frac{40}{7} \sqrt[4]{(x+5)^7} + 32 \sqrt[4]{(x+5)^3} + C \quad \text{д) } -2x + \ln|x-1| + C \\ 3. & \text{ а) } -\frac{1}{2(1+x^2)} + C \quad \text{б) } \frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3-9x)^6} + C \quad \text{в) } \frac{1}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{5}} + C \\ & \text{г) } -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2 \ln \left| e^{\frac{x}{2}} + 1 \right| + C \quad \text{д) } \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C \quad \text{е) } \ln |\sin x| + C \\ & \text{е) } \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C \quad \text{ж) } \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C \\ 4. & \text{ а) } \frac{(x+3)^3}{3} - \frac{3(x+3)^2}{2} + 3(x+3) + \ln|x+3| + C \\ & \text{б) } \frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}} + C \quad \text{в) } -\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x + C \\ & \text{г) } \frac{1}{2 \sin^2 x} + \ln |\cos x| + C \\ 5. & \text{ а) } \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C \quad \text{б) } \frac{1}{2} (x^2 - 1) \ln |x^2 - 1| - \frac{1}{2} x^2 + C \\ & \text{в) } -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C \quad \text{г) } -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + C \\ & \text{д) } \sin x (x^4 - 12x^2 + 24) + \cos x (4x^3 - 24x) + C \end{aligned}$$

Модуларна единица 6 – Определен интеграл

1. 1. а) 2 б) $8\frac{2}{3}$ в) $e-1$ г) 1 д) 2 е) $\frac{1}{2}$ е) $\frac{2}{3}$ ж) $\frac{3}{5}$	2. 1. а) 20 б) 7 в) $\frac{1}{10}$ г) $\frac{3}{8}$ д) $\frac{14}{3}$ е) $32\frac{2}{3}$
---	---

	е) 1.61 ж) $13\frac{1}{3}$ 2. а) $\ln 2 - \frac{5}{4}$; б) $-\frac{65}{4}$; в) $\ln \frac{3}{2} - 3$; г) $e^4 - e + \frac{14}{3}$. 3. а) 0; б) $\frac{256}{21}$.
3. 1. а) $1+e$ б) $\frac{11e-14}{e^2}$ в) 2 г) $-\frac{3}{e}$ д) 1 е) $\frac{1}{9}(1+2e^3)$ е) $\frac{2e\sqrt{e}}{9}$ ж) $\ln 2 - \frac{1}{2}$ 2. а) 0; б) $\frac{256}{21}$.	4. 1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{32}{3}$ 3. $3-e$ 4. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ 5. $\frac{1}{3}$ 6. $\frac{7}{6}$ 7. $e + \frac{1}{e} - 2$.

